

N° d'ordre :

THÈSES

présentées à la

Faculté des Sciences de l'Université de Paris

pour obtenir

Le Grade de Docteur ès Sciences Physiques

par

Gérard LASSAU

1 ère THESE : Etude d'une couche limite laminaire avec réaction chimique catalysée sur la paroi.

2 ème THESE : Influence de la géométrie de l'orifice dans les mesures de pressions statiques.

Soutenues le 19 Juin 1967 devant la Commission d'Examen

M. Ed. A. BRUN.....Président

MM. R. COMOLET.....
L. NAPOLITANO.....

} Examineurs

A. VAN TIGGELEN.....
B. LE FUR.....

} Invités

N° d'ordre :

THÈSES

présentées à la
Faculté des Sciences de l'Université de Paris

pour obtenir

Le Grade de Docteur ès Sciences Physiques

par

Gérard LASSAU

- 1 ère THESE : Etude d'une couche limite laminaire avec réaction chimique catalysée sur la paroi.
- 2 ème THESE : Influence de la géométrie de l'orifice dans les mesures de pressions statiques.

Soutenues le 19 Juin 1967 devant la Commission d'Examen

M. Éd. A. BRUN.....Président

MM. R. COMOLET.....
L. NAPOLITANO.....

} Examineurs

A. VAN TIGGELEN.....
B. LE FUR.....

} Invités



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549002_0028

N° d'ordre :

THÈSES

présentées à la
Faculté des Sciences de l'Université de Paris

pour obtenir

Le Grade de Docteur ès Sciences Physiques

par

Gérard LASSAU

1 ère THESE : Etude d'une couche limite laminaire avec réaction chimique
catalysée sur la paroi.

2 ème THESE : Influence de la géométrie de l'orifice dans les mesures de
pressions statiques.

Soutenues le 19 Juin 1967 devant la Commission d'Examen

M. Ed. A. BRUN.....Président

MM. R. COMOLET.....
L. NAPOLITANO.....

} Examineurs

A. VAN TIGGELEN.....
B. LE FUR.....

} Invités

UNIVERSITE DE PARIS
FACULTE DES SCIENCES DE PARIS

PROFESSEURS

Le Doyen M. ZAMANSKY

PRENANT	T Anatomie & histologie comparée	J.P. MATHIEU	T Physique optique	BELLAIR	T Géologie SPCN
GRASSE	T Evolution des êtres organisés	COUTEAUX	T Cytologie	COTTE	T Physique Electricité
PREVOST	T Chimie organique	CHOQUET	T Théorie des fonctions & topologie	DUBOIS JE	T Chimie organique physique
WYART	T Minéralogie & Cristallographie	FELDMANN	T Biologie végétale marine	LAMOTTE	T Zoologie ENS
TEISSIER	T Zoologie	JOST	T Physiologie comparée	OLMER	T Energétique générale
AUGER	T Physique quantique & relativité	FORTET	T Calcul des probabilités & physique mathématique	GAUTHIER	T Mécanique Appliquée
MONNIER	T Physiologie générale	SCHWARTZ	T Calcul différentiel & intégral	BARCHEWITZ	T Chimie Physique
PIVETEAU	T Paléontologie	CHOUARD	T Physiologie végétale	BROSSEL	T Physique atomique
ROCARD	T Physique E.N.S.	MALAVARD	T Aviation (technique aéronautique)	BUSER	T Physiologie comparée
CARTAN	T Mathématiques E.N.S.	BRELOT	T Analyse supérieure	CAMUS	T Physiologie végétale
LAFFITE	T Chimie générale	NORMANT	T Synthèse organique	CURIEN	T Minéralogie & cristallographie
N...	T Géométrie supérieure	RENARD	T Chimie appliquée	POSSOMPES	T Zoologie
COULOMB	T Physique du globe	DUGUE	T Statistique mathématique	PULLMANN	T Chimie quantique
Mlle COUSIN	T Biologie animale SPCN	SOULAIRAC	T Psychophysiologie	TEILLAC	T Physique nucléaire & radio-activité
CHRETIEN	T Chimie minérale	ULRICH	T Physiologie végétale appliquée	VILLE	T Econométrie
BOCQUET	T Zoologie	KIRRMANN	T Théories chimiques	WILLEMART	T Chimie CPEM
KASTLER	T Physique E.N.S.	CHADEFAUD	T Botanique	FREYMANN	T Recherches physiques
EPHRUSSI	T Génétique	Mlle LE BRETON	T Physiologie de la nutrition	ROLLET	T Chimie minérale
GAUTHIERET	Biologie végétale CPEM	LELONG	T Application de l'analyse à la géométrie	Mlle JOSIEN	T Chimie SPCN
LUCAS R.	Recherches Physiques	DEVILLERS	T Anatomie & histologie comparées	CHEVALLEY	T Géométrie algébrique & théorie des groupes
THOMAS A.	T Biologie cellulaire	EHRESMANN	T Topologie algébrique	GERMAIN	T Mécanique théorique des fluides
MORAND	T Physique enseignement	FRANCON	T Physique SPCN	LUCAS G.	T Géologie
SOLEILLET	T Physique CPEM	GLANGEAUD	T Géographie physique, géologie dynamique	AILARD	T Chimie physique
FORTIER	T Mécanique expérimentale des fluides	DODEMENT	T Mathématiques MGP	BERTHELOT	T Physique des particules fondamentales
DRACH	T Zoologie	PISOT	T Technique mathématique de la physique	BRICARD	T Météorologie
QUENEY	T Météorologie & dynamique de l'atmosphère	ROCH	T Géologie	Mme ALBE-FESSARD	T Psycho-physiologie
GALLIEN	T Embryologie	SCHATZMANN	T Astrophysique	M. JULIA	T Etude des molécules naturelles complexes
EICHHORN	T Botanique	TERMIER	T Géologie générale	MAGAT	T Physico-Chimie des rayonnements
DE CUGNAC	T Biologie végétale SPCN	ZAMANSKY	T Mathématiques générales	Mlle QUINTIN	T Electrochimie
Mlle CAUCHOIS	T Chimie Physique	LENNUIER	T Physique MGP	MONOD	T Chimie du métabolisme
THELLIER	T Physique du globe	ROUTHIER	T Géologie appliquée	DE POSSEL	T Analyse numérique
PONCIN	T Mécanique générale	Mme TONNELAT	T Physique théorique	CHARLOT	T Chimie analytique
DUBREIL	T Arithmétique & théorie des nombres	DIXMIER	T Mathématiques MPC	CHATELET	T Chimie CPEM
QUELET	T Chimie organique	SOUCHAY	T Chimie générale	MATTLER	T Physique SPCN
CAGNIARD	T Géophysique appliquée	AIGRAIN	T Electrotechnique	BOUISSIÈRES	T Radiochimie
CHAMPETIER	T Chimie macromoléculaire	BRUSSET	T Chimie systématique	Mme COUTURE	T Thermodynamique & mécanique physique
CUVILLIER	T Micropaléontologie	LEVY	T Physique théorique des hautes énergies	FRANC	T Biologie animale CPEM
JUNG	T Géologie	Mme CHAIX	T Chimie biologique	SCHNELL	T Botanique tropicale
TRILLAT	T Microscopie & diffraction électronique	Mme HUREL PY	T Biologie végétale CPEM	STOLKOWSKI	T Physiologie générale
WIEMANN	T Chimie organique & structurale	PANNETIER	T Chimie générale I	ACHER	T Chimie biologique
VASSY	T Physique de l'atmosphère	BRUN	T Mécanique des fluides I	BAUDOIN	T Biologie animale CPEM
DESTOUCHES	T Théorie physique	Mme DUBREIL	T mathématiques (agrégation)	BEAUMONT	Biologie animale SPCN
AMIEL	T Chimie générale	Mme LELONG	T Mathématiques II E.N.S.	BLAMONT	Géophysique ionosphère
HOCART	T Minéralogie & cristallographie			BOUREAU	T Botanique
				CURIE D.	Physique MGP

DURAND DELGA	T Géologie	NICOLAS	Géologie appliquée	COHEN TANNOUDJI	Physique atomique
HELLER	T Physiologie végétale	PANICEL	Biologie générale	TAVERNIER	Physique CPEM
TORTRAT	T Calcul des probabilités	RAVIER	T Pétrographie	DURAND M.	Biologie animale SPC N
CAILLEUX	T Géologie SPCN	MOREL F.	T Physiologie comparée	PASCAUD	Physiologie
MAGNAN	Physique Electricité	ROSEAU	T Mécanique théorique des fluides	Mme PETIT	Biologie animale CPEM
DAUDEL	T Mécanique ondulatoire	ROUBINE	Electronique E.S.E.	CAGNAC	Physique (agrégation)
Mle FOURCROY	Biologie végétale SPCN	SILBER	T Chimie CPEM	FALK-VAIRONT	Physique nucléaire
Mme CHOQUET-BRUHAT	Mécanique analytique & mécanique céleste	UEBERSFELD	T Electronique	KRASNER	T Mathématiques
Mle WEIL	T Physiologie générale		T Théories physiques	BENZECRI	T Statistiques
LWOFF	T Microbiologie	HERVE	T Mathématiques	VINH MAU	Physique MGP
SIESTRUNCK	T Mécanique physique & expérimentale	Mme PECKER-WIMEL	T Astrophysique	DUQUESNES	Physique CPEM
CABANNES	T Mécanique générale	BALKANSKI	Physique MPC	SCHUTZENBERGER	Programmation
CAIRE	T Géographie physique & géologie dynamique	LE CORRE	T Electricité	TREMILLON	Chimie MPC
COMOLET	Mécanique des fluides	NATAF	T Physique nucléaire & radioactivité	FAYARD	Chimie MPC
DELLOUE	T Physique de l'exosphère	ECHALIER	Biologie animale CPEM	BUVET	Chimie CPEM
HOUILLOIN	Biologie animale CPEM	BARRAUD	T Physique CPEM	AUTHIER	Physique MPC
OLIVIER	Anthropologie	DARS	Géologie structurale & Appliquée	PICINBONO	T Physique CPEM
SAMUEL	T Mathématiques (ENS jeunes filles)	CAMEFORT	T Botanique(agrégation)	BONNEFILLE	Electronique
THIRY	T Mécanique céleste	VICHNIEVSKI	T Mécanique industrielle	Mme PUISEUX-DAO	Biologie végétale
ABELES	T Physique SPCN	SIGWALT	T Chimie SPCN		
AMAT	T Thermodynamique	BLAQUIERE	Electronique		LE SECRETAIRE GENERAL
AUBOIN	T Géologie	BARUCH	Physique propédeutique		
Mme BENOIT-GUEUTAL	T Physique Nucléaire & radioactivité	ARNOUS	T Physique théorique		
BOUGIS	Biologie végétale marine Villefranche-s/-mer	SLONIMSKI	Génétique		
RIGAUDY	T Chimie SPCN	MALLIAVIN	T Mathématiques propédeutique		
COLLONGUES	Chimie CPEM	GAUDEMAR	Chimie propédeutique		
DUBERT	Biochimie	BROUSSE	T Mécanique théorique		
NOZIERES	Physique Générale	ROSCH	T Astronomie		
CADIOT	Chimie organique	CUY	T Physique expérimentale		
IVANOFF	Océanographie physique	LAZARD	Mathématiques MPC		
FRANCOIS	Zoologie	MOREL P.	Physique MPC		
TALBOT	Génie chimique	ARSAC	Programmation		
Mme NOUGAREDE	Botanique	LEFEBVRE	Chimie MPC		
BRUHAT	T Mathématiques MPC	BOB	Physique Propédeutique		
FOURNET	Electricité générale	CHAPEVILLE	Biochimie		
DEHEUVELS	T Mathématiques propédeutique	BENOIT	Physique CPEM		
FURON	T Géologie SPCN	RIO	Chimie CPEM		
Mme GANS	T Génétique	JAUZEIN	Géologie ENS		
GENEVES	Biologie végétale CPEM	PREVOST G.	Biologie végétale CPEM		
HUPE	T Pétrographie	FAVARD P.	Biologie animale CPEM		
HOLLANDE	T Biologie générale	Mme CHARNIAUX	Evolution des êtres organisés		
LIONS	T Analyse numérique	-COTTON			
MAITTE	T Chimie organique	Mle FICINI	Chimie CPEM		
		LEQUEUX	Astronomie		

UNIVERSITE DE PARIS

FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY

Janvier 1966

PROFESSEURS

MANGENOT G.	T Biologie végétale	GUERIN	T Chimie des gaz et des combustibles	BOURDU	Physiologie végétale
JACQUINOT P.	T Optique	LESIEUR	T Mathématiques MPC et algèbre	BERKALOFF	Biologie animale CPEM
GUINIER	T Electricité & physique des solides	KOURGANOFF	T Astronomie	Mlle LEFORT	Biologie cellulaire CPEM
GRIVET	T Electronique	ARNOULT	T Physique électronique	Mme LAMBERT	Physique CPEM
BLANC-LAPIERRE	T Accélérateur linéaire	KAHANE	T Mathématiques	BIZOT	Physique MPC
L'HERITIER	T Génétique des virus	BROCHARD	T Physique propédeutique	GUIRAUD	Mecanique
LEMEE	T Ecologie végétale	Mme ROIZEN	T Physique CPEM	LABOUESSE	Chimie SPCN
MOYSE	T Physiologie végétale	BERTEIN	T Electronique		
DODE	T Chimie thermodynamique	MALGRANGE	T Mathématiques		
DENY	T Mathématiques	CORABOEUF	T Physiologie animale		
RIVIERE	T Géologie générale à sédimentation	FRIEDEL	T Physique des solides		
MICHEL	T Chimie minérale	CHEVAUGEON	T Cryptogamie		
MAY	T Anatomie comparée	MEYER	T Physique théorique & atomique		
DELANGE	T Mathématiques	LEHMANN	T Accélérateur linéaire		
CHAPELLE	T Physique expérimentale	CHABBAL	T Physique propédeutique		
LACOMBE	T Métallurgie	DELCROIX	T Physique des plasmas		
BENOIT	T Physiologie générale	CERF	T Mathématiques		
GUINOCHE	T Biologie végétale SPCN	D'ESPAGNAT	T Physique théorique		
NERON	T Mathématiques	SCHAEFFER	T Microbiologie		
NOZERAN	T Botanique approfondie	DE GENNES	T Physique des solides		
CASTAING	T Thermodynamique	Mme MARTY	Physique propédeutique		
ELLENBERGER	T Géologie structurale	GOURDIN	Physique théorique		
LEDERER	T Chimie biologique	PEREZ-Y-JOREA	Physique propédeutique		
RIZET	T Génétique	GORENFLOT	Biologie végétale SPCN		
LENDER	T Biologie animale SPCN	RIOU	Physique nucléaire		
POITOU	T Mathématiques	BROUSSE	Géologie SPCN		
FREON	T Chimie organique	LIORET	Physiologie végétale		
TONNELAT	T Biologie physico-chimique	CLAUSER	Chimie biologique		
BRUNN	T Géologie historique	JANCCVICI	Physique atomique		
JEAN	T Physique nucléaire	LURCAT	Physique propédeutique		
BERGERARD	T Zoologie	LE BERRE	Entomologie		
ROGER	T Paléontologie	LAVOREL	Biophysique		
LEFORT	T Chimie nucléaire	PERIO	Physique propédeutique		
LAGARRIGUE	T Physique des hautes énergies	PETIZON	Stéréochimie		
JULLIEN	T Chimie structurale organique	CHEMLA	Chimie des isotopes		
ARNULF	T Optique	MAZIERES	Chimie SPCN		
ROUAULT	T Diffraction électronique	VILKAS	Chimie CPEM		
MARECHAL	T Optique théorique et appliquée	BLANDIN	Physique des solides		
MAZET	T Mécanique générale	BRUN G.	Génétique		
DAVID	T Chimie agrégation	MERCOUROFF	Physique agrégation		
		ANDRE	Microscopie électronique		
		CHEVALLIER	Physiologie animale		
		Mlle MARCOU	Biologie cellulaire CPEM		

A ma femme

Je prie Monsieur le Professeur BRUN de bien vouloir trouver ici l'expression de ma profonde reconnaissance pour les conseils, l'aide et les encouragements qu'il n'a cessé de me prodiguer durant les années passées dans son laboratoire.

Je remercie Monsieur le Professeur COMOLET, Monsieur le Professeur NAPOLITANO et Monsieur le Professeur VAN TIGGELEN pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter aux résultats de mon travail.

Je dois également remercier Monsieur LE FUR qui, grâce à ses conseils, m'a permis de commencer rapidement l'étude théorique des couches limites laminaires.

Enfin, tous mes remerciements vont à l'équipe du laboratoire qui m'a aidé à réaliser les différents montages expérimentaux.

NOTATIONS

a	, concentration réduite du composant M
A_M ou A_N	, concentration des composants M ou N
D	, coefficient de diffusion
E	, paramètre définissant l'effet catalytique de la paroi d'une plaque plane égal à $(Da Sc^{2/3})/0,339$
I	, intensité lumineuse captée par le photomultiplicateur
k_i	, constante de la réaction catalytique inverse
k_d	, constante de la réaction catalytique directe
ℓ	, épaisseur de la plaque isolante
L	, longueur caractéristique
m	, débit masse du gaz dans la soufflerie
M et N	, composants de la réaction
p	, pression du gaz
Q	, débit d'eau de la sonde thermique
R	, rayon du jet de plasma
t	, variable auxiliaire égale à $\int_0^x (2 \tau_p)^{1/2} dx$
T	, température en degré Kelvin
u	, composante longitudinale de la vitesse
v	, composante verticale de la vitesse
x, y	, système de coordonnées
Z	, variable auxiliaire égale à $u_e^2(x) - u_{(x,y)}^2$
Z'	, variable auxiliaire égale à $E \sqrt{x}$
Da	, nombre de Damköhler catalytique égal à $(k_i + k_d)/u_\infty$
Pe	, nombre de Péclet égal à $L u_\infty / D$
Pr	, nombre de Prandtl égal à $\mu c_p / \lambda$
Sc	, nombre de Schmidt égal à ν / D
Re	, nombre de Reynolds égal à $L u_\infty / \nu$
θ	, concentration réduite égale à $(a - 1)$
λ	, conductivité thermique de l'air
λ_i	, conductivité thermique de la plaque isolante

μ	, viscosité
ν	, viscosité cinématique
ρ	, masse volumique
ϕ	, flux de chaleur recueilli sur la sonde thermique
φ	, flux de masse
ψ	, fonction de courant
τ	, tension de frottement

Indices

$()_c$	, au centre du jet
$()_e$	, à l'extérieur de la couche limite
$()_n$	, se rapporte à l'approximation d'ordre n
$()_p$	, à la paroi
$()_\infty$	, à l'infini amont
$()^{(n)}$	, indice supérieur qui donne l'ordre de transformation utilisée pour revenir au plan physique

CHAPITRE 1

Introduction

L'étude des réactions catalytiques dans une couche limite laminaire a débuté il y a environ dix ans. C'est un des problèmes que pose l'échauffement des capsules spatiales pendant leur rentrée dans l'atmosphère.

Lors de cette rentrée [1], les composants de l'air se transforment à la traversée de l'onde de choc, par suite de la forte élévation de température (dissociation, formation de NO). L'équilibre chimique dépend alors des paramètres thermodynamiques de l'onde de choc. Entre l'onde de choc et la paroi, les variables thermodynamiques subissent une variation rapide, mais le gaz ne prend pas en chaque point l'état thermodynamique correspondant à l'équilibre chimique, la constante de temps des réactions étant très grande devant le temps de séjour des gaz le long de l'engin.

On a donc, le long de la paroi, une couche limite formée de gaz dans un état métastable. Cependant, en général, la paroi a un effet catalytique qui rend la vitesse de réaction suffisamment grande pour modifier l'état du gaz à la paroi. Il y aura alors diffusion dans la couche limite, puisque la concentration n'est pas la même en tous les points.

Nous nous attacherons ici au problème de l'interaction entre la diffusion d'un constituant et sa production ou destruction sur une paroi placée dans un écoulement (phénomènes de sublimation, évaporation, condensation, diffusion à travers une paroi poreuse, réaction catalytique).

Après une brève revue bibliographique, nous exposerons successivement :

1°) une méthode générale d'intégration analytique qui permet d'obtenir les profils de vitesse et de concentration, quelles que soient la forme du corps bidimensionnel et les conditions à la paroi,

2°) une résolution analogique des équations de la diffusion qui permet de déterminer les flux de masse pariétaux, si l'on connaît les paramètres de la réaction catalytique,

3°) la détermination des coefficients cinétiques de la réaction de recombinaison de l'azote atomique sur une paroi.

CHAPITRE 2

Travaux antérieurs

Les équations de la couche limite sur un obstacle bidimensionnel ont été décrites dans la référence [2]. Elles sont valables aux grands nombres de Reynolds et de Péclet, et lorsque la courbure n'est pas trop élevée. En toute rigueur, les propriétés physiques dépendent de la température et de la concentration du mélange gazeux. Lorsque les variations de concentration sont faibles, les propriétés physiques peuvent être prises constantes. En outre, si l'on suppose que le produit $\rho\mu$ est constant et que le nombre de Prandtl est voisin de l'unité, l'étude d'une couche limite compressible se ramène à l'étude d'une couche limite à propriétés physiques constantes [3].

GOULARD [4] a étudié le problème de la catalyse au point d'arrêt d'un engin en tenant compte de la vitesse de la réaction. On sait que, pour une couche limite dynamique au point d'arrêt, la solution comporte une similitude et que l'on peut résoudre complètement l'équation des concentrations dans la couche limite à l'aide de la fonction $f(\eta)$ de BLASIUS [5].

CHUNG et ANDERSON [6] ont calculé, par une méthode semblable, le transfert de chaleur sur un obstacle rond dans un écoulement hypersonique figé.

CHAMBRÉ et ACRIVOS [7], [8] ont intégré les équations dans le cas d'une plaque plane sans gradient de pression en supposant le nombre de Schmidt élevé. Cette analyse est analogue à celle de LIGHTHILL [9] sur le transfert de chaleur. Ces auteurs supposent que l'épaisseur de la couche limite de diffusion est suffisamment faible pour que le profil de vitesse puisse être remplacé par sa tangente dans l'équation de la diffusion. Cela revient à dire que le nombre de Schmidt, rapport de la viscosité cinématique au coefficient de diffusion, est grand devant l'unité.

CHUNG, LIU et MIRELS [10] ont traité d'une façon semblable un problème de discontinuité catalytique. La couche limite de diffusion se formant alors dans la couche limite dynamique, son épaisseur, juste à l'aval de la discontinuité, est plus faible que celle de la couche limite dynamique. L'hypothèse du grand nombre de Schmidt n'est plus nécessaire pour résoudre ce problème.

FOX et LIBBY [11],[12] ont trouvé les profils de concentration à la paroi dans le cas d'un nombre de Schmidt voisin de l'unité par une méthode de petites perturbations, quelle que soit la distribution du catalyseur. Ce dernier auteur [13] a résolu ces équations en généralisant la méthode des moments.

INGERS [14],[15] a plus pratiquement développé le cas d'une réaction catalytique dont la constante de vitesse varie avec l'abscisse, ce qui correspond à une variation de température.

SIMPKINS [16] a utilisé la transformation de Mellin pour trouver la distribution des concentrations sur une surface comprenant des discontinuités catalytiques. Ce même auteur [17] a effectué également une étude expérimentale : dans ce travail, les flux de chaleur sur une paroi placée dans un écoulement supersonique figé sont mesurés, mais les profils de concentration ne sont pas dégagés des expériences.

ROSNER [18],[19] a généralisé le travail de Chambré et Acrivos en supposant la réaction d'un ordre quelconque.

Tout récemment, LI et KIRK [20] ont étendu la méthode des séries de MEKSYN [21] au problème de la diffusion de deux corps réagissant sur une paroi catalytique.

A cette liste, il faut ajouter le livre de DORRANCE [22].

Tous les auteurs cités ont supposé soit un profil de vitesse en similitude, soit un nombre de Schmidt grand, soit un nombre de Schmidt égal à l'unité.

Ces hypothèses simplificatrices n'ont pas été employées dans la méthode d'intégration que nous exposons au chapitre 4. Cette méthode de calcul est semblable à celle de LE FUR [23] qui a obtenu des relations intégrales à la paroi. Dans les chapitres 5 et 6, ces relations sont intégrées dans le cas général et permettent d'obtenir les profils de vitesse et de concentration, quels que soit le nombre de Schmidt et les conditions aux limites.

CHAPITRE 3

Mise en équations

Supposons un écoulement gazeux en équilibre métastable le long d'un obstacle bidimensionnel recouvert d'un catalyseur qui rend l'équilibre de l'écoulement stable à la température et à la pression de la paroi.

Supposons également :

- que le mélange gazeux soit composé de deux corps M et N (mélange binaire),
- que la réaction entre M et N s'effectue sans changement de volume,
- que les propriétés physiques du mélange M et N soient indépendantes de la concentration et de la température.

Les équations aux dérivées partielles auxquelles obéissent les concentrations $A_M(x,y)$ et $A_N(x,y)$ des constituants à l'intérieur de la couche limite sont :

$$(3.1) \quad u \frac{\partial A_M}{\partial x} + v \frac{\partial A_M}{\partial y} = D \frac{\partial^2 A_M}{\partial y^2}$$

et

$$(3.2) \quad u \frac{\partial A_N}{\partial x} + v \frac{\partial A_N}{\partial y} = D \frac{\partial^2 A_N}{\partial y^2} ,$$

où u et v sont les composantes de la vitesse, respectivement suivant la direction du courant et la direction normale à la paroi de l'obstacle : S est le coefficient de diffusion massique d'un constituant M dans le constituant N défini par la loi qui donne l'expression de la composante normale de la densité de flux de masse φ_M du composant M :

$$(3.3) \quad \varphi_M = - D \left(\frac{\partial A_M}{\partial y} \right) .$$

Remarquons que les équations ne comportent pas ici de termes de transfor-

mation chimique dans le second membre, car on a supposé que les vitesses de réaction en phase homogène sont faibles devant les termes de transport par convection et diffusion (couche limite figée).

La condition à la paroi est obtenue en écrivant l'égalité entre la vitesse de production par unité de surface due à la réaction chimique catalysée, et la composante normale de la densité de flux de masse, soit :

$$(3.4) \quad (\varphi_M)_p = - \left[k_d (A_M)_p - k_i (A_N)_p \right] ,$$

$$(3.5) \quad (\varphi_N)_p = - (\varphi_M)_p .$$

k_d et k_i sont respectivement les constantes de la réaction chimique directe $M \rightarrow N$ et inverse $N \rightarrow M$.

L'hypothèse d'une réaction catalytique du premier ordre correspond à des conditions expérimentales à basse pression [24], [45], [46] ou à faible concentration.

L'explication peut être fournie par le mécanisme de la catalyse :

1°) adsorption à la paroi et formation d'une phase adsorbée sur la paroi :



2°) réaction de cette phase :



3°) désorption de M_2 :



Si la concentration dans le gaz est faible, c'est le mécanisme d'adsorption qui est le plus lent; c'est donc lui qui donne l'ordre de la réaction.

La concentration de P^* ne dépend pas de celle de M. L'ordre de la première réaction est 1 par rapport à M.

Les deux autres conditions aux limites sont :

$$(3.6) \quad y \rightarrow \infty, \quad A_M \rightarrow (A_M)_\infty, \quad A_N \rightarrow (A_N)_\infty;$$

$$(3.7) \quad x = 0, \quad A_M \rightarrow (A_M)_\infty, \quad A_N \rightarrow (A_N)_\infty.$$

Les concentrations sont supposées constantes à l'extérieur de la couche limite et égales aux concentrations à l'infini amont (écoulement figé).

Nous avons supposé, au départ, que la masse volumique du mélange ne dépendait pas de la concentration :

$$(3.8) \quad A_M + A_N = \rho.$$

L'équation (3.2) se ramène donc à l'équation (3.1), que l'on peut résoudre avec les conditions aux limites (3.6) et la condition à la paroi :

$$(3.9) \quad (\varphi_M)_p = -D \left(\frac{\partial A_M}{\partial y} \right)_p = (k_d + k_i) (A_M)_p - k_i \rho$$

$$= (k_d + k_i) \left[(A_M)_p - (A_M)_{\text{éq}} \right],$$

où $(A_M)_{\text{éq}}$ est la concentration à l'équilibre définie par :

$$(3.10) \quad (A_M)_{\text{éq}} = \frac{k_i \rho}{k_d + k_i}.$$

Introduisons la concentration réduite, a^* , fonction de la concentration d'équilibre :

$$(3.11) \quad a^* = \frac{(A_M)_{\text{éq}} - (A_M)}{(A_M)_{\text{éq}} - (A_M)_\infty},$$

et les dimensions réduites :

$$(3.12) \quad u^* = \frac{u}{u_\infty} \quad , \quad v^* = \frac{v}{u_\infty} \quad , \quad x^* = \frac{x \cdot u_\infty}{\nu} \quad , \quad y^* = \frac{y \cdot u_\infty}{\nu} \quad ,$$

$$\varphi^* = \frac{\varphi_M}{[(A_M)_{\text{éq}} - (A_M)_\infty] u_\infty} \quad .$$

L'équation (3.1) s'écrit :

$$(3.13) \quad u^* \frac{\partial a^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial a^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Sc} \cdot \frac{\partial^2 a^*}{\partial y^{*2}} \quad ,$$

où Sc est le nombre de Schmidt égal à ν/D .

Les conditions aux limites deviennent :

$$(3.14) \quad y^* = 0 \quad , \quad \frac{1}{Sc} \frac{\partial a^*}{\partial y^*} = Da \cdot a^* = -\varphi_p^*(a^*) \quad .$$

Da est le nombre de Damköhler catalytique égal à $(k_i + k_d)/u_\infty$.

$$(3.15) \quad y^* \longrightarrow \infty \quad , \quad a^* \longrightarrow 1 \quad ,$$

$$(3.16) \quad x^* = 0 \quad , \quad a^* = 1 \quad .$$

Pour résoudre l'équation (3.1), il faut introduire l'équation de la conservation de la masse, écrite en variables réduites :

$$(3.17) \quad \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad ,$$

et l'équation de l'impulsion :

$$(3.18) \quad u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = u_e^* \frac{du_e^*}{dx^*} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad ,$$

avec ses conditions aux limites :

$$(3.19) \quad y^* \longrightarrow 0 \quad , \quad u^* \text{ et } v^* \longrightarrow 0 \quad ,$$

$$(3.20) \quad y^* \longrightarrow \infty \quad , \quad u^* \longrightarrow u_e^*(x^*) \quad .$$

Nous établirons que le paramètre fondamental qui intervient dans la résolution de ces équations est la contrainte à la paroi :

$$(3.21) \quad \tau_p = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_p ;$$

à cette contrainte correspond la variable sans dimensions :

$$(3.22) \quad \tau_p^* = \frac{\tau_p}{\rho u_\infty^2} = \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)_p .$$

Dans le reste du calcul, les variables réduites étant les seules variables utilisées, nous les écrirons sans astérisques.

CHAPITRE 4

Méthode d'intégration analytique

Introduisons, par la transformation de von Mises, la fonction de courant réduite ψ comme variable indépendante; elle satisfait à l'équation de la conservation de la masse car :

$$(4.1) \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x} .$$

Les équations (3.18) et (3.13) deviennent :

$$(4.2) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} - u_e \frac{du_e}{dx} - u \frac{\partial}{\partial \psi} \left(u \frac{\partial u}{\partial \psi} \right) = 0$$

$$(4.3) \quad \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(u \frac{\partial a}{\partial \psi} \right) = 0 .$$

Nous éliminerons le terme $u_e \frac{du_e}{dx}$ en posant :

$$(4.4) \quad Z = u_e^2 (x) - u^2 (x, \psi) \quad ;$$

il vient :

$$(4.5)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} - u \frac{\partial^2 Z}{\partial \psi^2} = 0$$

$$(4.6)$$

$$\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(u \frac{\partial a}{\partial \psi} \right) = 0 ,$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$x \rightarrow 0 \quad , \quad Z (x, \psi) \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad a (x, \psi) \rightarrow 1$$

$$\psi \rightarrow \infty \quad , \quad Z (x, \psi) \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad a (x, \psi) \rightarrow 1$$

$$(4.7) \quad \lim_{\psi \rightarrow 0} Z(x, \psi) = u_e^2(x) \quad \text{et} \quad \lim_{\psi \rightarrow 0} \left(\frac{u}{Sc} \cdot \frac{\partial a}{\partial \psi} \right) = D_a \cdot \lim_{\psi \rightarrow 0} a \quad .$$

Soit $u^{(0)}(x, \psi)$ l'équation de la tangente à l'origine du profil de vitesse. Elle s'exprime en fonction de la contrainte tangentielle pariétale :

$$(4.8) \quad \tau_p = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \lim_{\psi \rightarrow 0} \left(u \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad .$$

On a donc :

$$(4.9) \quad u^{(0)}(x, \psi) = (2 \tau_p)^{1/2} \psi^{1/2} \quad .$$

Ajoutons $u (\partial^2 Z / \partial \psi^2)$ et retranchons $u^{(0)} (\partial^2 Z / \partial \psi^2)$ aux deux membres de l'équation de l'impulsion (4.5) :

$$(4.10) \quad \frac{\partial Z}{\partial x} - u^{(0)} \frac{\partial^2 Z}{\partial \psi^2} = (u - u^{(0)}) \frac{\partial^2 Z}{\partial \psi^2} \quad .$$

On aura, d'une façon analogue, une expression équivalente pour l'équation de la diffusion (4.6) :

$$(4.11) \quad \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{1}{Sc} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi} \left(u^{(0)} \frac{\partial a}{\partial \psi} \right) = \frac{1}{Sc} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi} \left[(u - u^{(0)}) \frac{\partial a}{\partial \psi} \right] \quad .$$

Nous allons nous placer maintenant dans un plan auxiliaire (t, ψ) , où t est une nouvelle variable indépendante :

$$(4.12) \quad t = \int_0^x (2 \tau_p)^{1/2} dx \quad ,$$

qui permet d'éliminer dans le premier membre le terme $(2 \tau_p)^{1/2}$ qui provient de $u^{(0)}$.

Nous aurons donc le système :

$$(4.13) \quad \begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial t} - \psi^{1/2} \frac{\partial^2 Z}{\partial \psi^2} = \left(\frac{u}{(2 \tau_p)^{1/2}} - \psi^{1/2} \right) \frac{\partial^2 Z}{\partial \psi^2} \quad , \end{cases}$$

$$(4.14) \quad \begin{cases} \frac{\partial a}{\partial t} - \frac{1}{Sc} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\psi^{1/2} \frac{\partial a}{\partial \psi} \right) = \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\left(\frac{u}{(2 \tau_p)^{1/2}} - \psi^{1/2} \right) \frac{\partial a}{\partial \psi} \right] \quad . \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, nous utiliserons une méthode d'intégration par approximations successives :

- dans la première approximation, on négligera le second membre des équations, qui est nul à la paroi et à l'extérieur de la couche limite;

- dans le cas de l'équation de la diffusion, cette hypothèse sera d'autant plus justifiée que l'épaisseur de la couche limite de diffusion sera plus faible que l'épaisseur de la couche limite dynamique, c'est-à-dire lorsque le nombre de Schmidt sera grand devant l'unité. On écrira donc, l'indice 1 signifiant que l'on a affaire aux solutions de la première approximation,

$$(4.15) \quad \begin{cases} \frac{\partial z_1}{\partial t} - \psi^{1/2} \frac{\partial^2 z_1}{\partial \psi^2} = 0 \end{cases}$$

$$(4.16) \quad \begin{cases} \frac{\partial a_1}{\partial t} - \frac{1}{Sc} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi} (\psi^{1/2} \frac{\partial a_1}{\partial \psi}) = 0 \end{cases} .$$

Dans les approximations suivantes, on remplacera, dans le second membre, u , τ_p , Z et a par les expressions de l'approximation antérieure, c'est-à-dire, pour $i \geq 1$:

$$(4.17) \quad \begin{cases} \frac{\partial z_{i+1}}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z_{i+1}}{\partial \psi^2} = \left[\frac{u_i}{(2 \tau_{pi})^{1/2}} - \psi^{1/2} \right] \frac{\partial^2 z_i}{\partial \psi^2} , \end{cases}$$

$$(4.18) \quad \begin{cases} \frac{\partial a_{i+1}}{\partial t} - \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial \psi} (\psi^{1/2} \frac{\partial a_{i+1}}{\partial \psi}) = \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\left(\frac{u_i}{4 \tau_{pi}^{1/2}} - \psi^{1/2} \right) \frac{\partial a_i}{\partial \psi} \right] . \end{cases}$$

Pour pouvoir revenir au plan physique (x,y) , il faudrait connaître les vraies valeurs de τ_p et de u . Comme nous ne les connaissons pas, nous ferons correspondre à chaque solution d'indice i dans le plan (t,ψ) une transformation différentielle pour passer au plan physique (x,y) :

$$(4.19) \quad x = F_i(t, \psi) = \int_0^t \frac{dt}{(2 \tau_{pi})^{1/2}} ,$$

$$(4.20) \quad y = G_i(t, \psi) = \int_0^\psi \frac{d\psi}{u_i} .$$

CHAPITRE 5

Calcul des profils de vitesse dans le cas de la première approximation

5.1. Formule générale⁽¹⁾.-

L'équation différentielle dans le plan (t, ψ) de l'équation des vitesses dans le cas de la première approximation est :

$$(5.1) \quad \frac{\partial Z_1}{\partial t} - \psi^{1/2} \frac{\partial^2 Z_1}{\partial \psi^2} = 0 \quad ,$$

avec ses conditions aux limites :

$$(5.2) \quad \begin{cases} \psi \rightarrow 0 & , & Z_1(t, \psi) \rightarrow u_e^2(t) \\ \psi \rightarrow \infty & , & Z_1(t, \psi) \rightarrow 0 \\ x = 0 & , & Z_1(t, \psi) = 0 \end{cases} .$$

Eliminons, en utilisant le calcul symbolique, la dérivation par rapport à la variable t . C'est-à-dire qu'en employant la formule de Carson, nous aurons :

$$(5.3) \quad \mathfrak{Z}_1(p, \psi) = p \int_0^\infty e^{-pt} Z_1(t, \psi) dt \quad ,$$

où

$$(5.4) \quad \mathfrak{Z}_1(p, \psi) \subset Z_1(t, \psi) \quad .$$

Appelons :

$$(5.5) \quad \xi(p) \subset Z_1(t, 0) \quad ;$$

.../...

(1) Les calculs qui suivent ont été commencés par LIGHTHILL [9] et repris par LE FUR [23]. Pour la clarté de l'exposé, nous les avons détaillés.

nous aurons :

$$(5.6) \quad \begin{cases} \lim_{\psi \rightarrow 0} x_1(p, \psi) = \xi(p) \\ \lim_{\psi \rightarrow \infty} x_1(p, \psi) = 0 \end{cases} .$$

L'équation (5.1) devient :

$$(5.7) \quad p x_1 - \frac{\partial}{\partial \psi} (\psi^{1/2} \frac{\partial x_1}{\partial \psi}) = 0 .$$

Cherchons une variable s , fonction de p et de ψ , telle que l'équation (5.7) ne comprenne plus que des puissances de s ; on posera :

$$(5.8) \quad s = \omega p^\alpha \psi^\beta ,$$

où ω est une constante, et on remplacera $\frac{\partial}{\partial \psi}$ par sa valeur $\frac{\partial s}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial}{\partial s}$, puisque ψ et p sont des variables indépendantes; on trouve :

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{3}{4} .$$

Pour simplifier l'écriture, nous prendrons $\omega = \frac{4}{3}$, d'où :

$$(5.9) \quad s = \frac{4}{3} p^{1/2} \psi^{3/4} ;$$

il vient :

$$(5.10) \quad \psi = \left(\frac{3}{4} \right)^{4/3} p^{-2/3} s^{4/3} ,$$

$$(5.11) \quad \frac{\partial}{\partial \psi} = \left(\frac{4}{3} \right)^{1/3} p^{2/3} s^{-1/3} \frac{\partial}{\partial s} ;$$

en posant :

$$(5.12) \quad Q_1(p, s) = s^{-2/3} x_1(p, \psi)$$

et en divisant l'équation par $p s^{2/3}$, nous obtenons une équation de Bessel sans

second membre :

$$(5.13) \quad \frac{\partial^2 Q_1}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial Q_1}{\partial s} - \left(1 + \frac{4}{9s^2}\right) Q_1 = 0 ,$$

avec les conditions aux limites tirées de (5.6) :

$$(5.14) \quad \begin{cases} \lim_{s \rightarrow 0} \left[s^{2/3} Q_1(p, s) \right] = \xi(p) \\ \lim_{s \rightarrow \infty} \left[s^{2/3} Q_1(p, s) \right] = 0 . \end{cases}$$

L'intégration de cette équation est classique; nous obtenons :

$$(5.15) \quad Q_1(p, s) = \omega_1^-(p) \cdot I_{-2/3}(s) + \omega_1^+(p) I_{+2/3}(s) .$$

$I_{-2/3}$ et $I_{+2/3}$ sont les fonctions de Bessel modifiées d'ordre $-2/3$ et $+2/3$.

Les coefficients sont déterminés par les conditions aux limites. On sait que [25] :

$$(5.16) \quad \lim_{z \rightarrow 0} \left[I_\nu(z) \right] \simeq \left(\frac{1}{2} z \right)^\nu / \Gamma(\nu + 1) .$$

Si s tend vers zéro, on aura donc :

$$(5.17) \quad s^{2/3} \left[\omega_1^-(p) \left(\frac{1}{2} s \right)^{-2/3} / \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) + \omega_1^+(p) \left(\frac{1}{2} s \right)^{2/3} / \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \right] = \xi_1(p) ,$$

d'où :

$$(5.18) \quad \omega_1^-(p) = \frac{\xi_1(p) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{2/3}} ;$$

si s tend vers l'infini, il faut que :

$$(5.19) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \left[s^{2/3} \left(\omega_1^-(p) I_{-2/3}(s) + \omega_1^+(p) I_{+2/3}(s) \right) \right] = 0 .$$

Ceci est obtenu en prenant la fonction $\omega_1^+(p)$ égale à $\omega_1^-(p)$. Il apparaît ainsi la fonction [25] :

$$(5.20) \quad K_{2/3}(s) = \frac{\pi}{2} \left(I_{-2/3}(s) - I_{+2/3}(s) \right) / \sin \frac{2\pi}{3}$$

qui, lorsque s est grand, est équivalente à $e^{-s}/\sqrt{s}$.

Finalement, nous aurons comme solution de l'équation (5.18) :

$$(5.21) \quad Q_1(p, s) = \frac{3^{1/2}}{2^{2/3}\pi} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \xi(p) K_{2/3}(s) \quad .$$

Revenons à $\mathcal{Z}_1(p, \psi)$ avec (5.12) :

$$(5.22) \quad \mathcal{Z}_1(p, \psi) = \frac{2^{2/3}}{3^{1/6}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\pi} \psi^{1/2} p^{1/3} \xi(p) K_{2/3}\left(\frac{4}{3} \psi^{3/4} p^{1/2}\right) \quad .$$

L'original de $K_{2/3}\left(\frac{4}{3} \psi^{3/4} p^{1/2}\right)$ peut être obtenu par l'expression suivante [26] :

$$(5.23) \quad 2 \beta^{1/2} p^{k+(1/2)} K_{2\mu}(2 \beta^{1/2} p^{1/2}) \subset t^{-k} \exp\left(-\frac{\beta}{2t}\right) W_{k,\mu}\left(\frac{\beta}{t}\right) \quad ,$$

où $W_{k,\mu}$ est la fonction de Whittaker; compte tenu de (5.21) et (5.20), nous obtenons :

$$(5.24) \quad \beta = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \psi^{3/2} \quad , \quad \mu = \frac{1}{3} \quad , \quad k = -\frac{1}{6} \quad .$$

Le développement de la fonction de Whittaker donne⁽¹⁾, en remplaçant $Z(t', 0)$ par $u_e^2(t')$,

$$(5.25) \quad \boxed{Z(t, \psi) = \int_0^t \frac{d[u_e^2(t')]}{dt'} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}, \frac{\beta}{t-t'}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} dt' \quad .}$$

En prenant le développement limité de (5.25) quand ψ tend vers zéro, on trouve la relation intégrale :

$$(5.26) \quad \int_0^t (t-t')^{-1/3} \tau_{p1}(t') dt' = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{2/3} 3^{1/3}} u_e^2(t) \quad ;$$

.../...

(1) Les calculs détaillés de cette transformation sont explicités dans le chapitre suivant.

comme

$$x = F_1(t, \psi) = \int_0^t \frac{dt}{(2 \tau_{p1})^{1/2}},$$

la contrainte tangentielle pariétale est solution de l'équation intégrale⁽¹⁾ :

$$(5.27) \quad \int_0^x \left(\int_{x'}^x [\tau_{p1}(x'')]^{1/2} dx'' \right)^{-1/3} [\tau_{p1}(x')]^{3/2} dx' = \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{2^{2/3} 3^{1/3}} u_e^2(x)$$

Nous reviendrons au plan physique(x,y) par les relations (4.19) et (4.20).

5.2. Cas particulier de la similitude.

Appliquons ces résultats au dièdre, pour lequel $u_e = x^m$. Dans le plan(t,ψ), en résolvant l'équation (5.27), LE FUR a montré que [23] :

$$(5.28) \quad u(t) = u_m t^k,$$

avec :

$$(5.29) \quad k = \frac{4m}{3(m+1)}, \quad u_m = \left[\frac{3^{7/6}}{2^{13/6}} \frac{m+1}{\sqrt{Q(m)}} \right]^{m/m+1}, \quad Q(m) = \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3})} \frac{\Gamma(\frac{11m+3}{3m+3})}{\Gamma(\frac{9m+1}{3m+3})}.$$

L'intégration de (5.25), compte tenu de (5.28), donne :

$$(5.30) \quad Z(t, \psi) = u_m^2 \left(\frac{\beta}{t} \right)^{2/3} \frac{t^{2k}}{\Gamma(\frac{2}{3})} e^{-\beta/t} \Gamma(2k+1) U(2k+1, \frac{5}{3}, \frac{\beta}{t}),$$

où $U(a, b, \frac{\beta}{t})$ est la fonction de Kummer de deuxième espèce [25].

D'après [23], la relation t(x), obtenue par intégration de (5.27), est :

$$(5.31) \quad t^{2/3} = \frac{2^{13/12}}{3^{7/12}} (m+1)^{1/2} [Q(m)]^{1/4} \sqrt{u_e \cdot x},$$

et l'équation (5.30) montre que u ne dépend que de

$$\eta = y \sqrt{\frac{u_e}{x}} \cdot h(m);$$

.../...

(1) Ce dernier résultat a déjà été trouvé par LE FUR [23] et LIDTHILL [9] en prenant le développement limité de (5.22).

prenant comme l'ont fait FALKNER et SKAN [5] :

$$(5.32) \quad \Psi = \sqrt{\frac{2 u_e x}{m+1}} \cdot f(m, \eta) ,$$

on obtient :

$$(5.33) \quad \eta = y \sqrt{\frac{m+1}{2} \frac{u_e}{x}} .$$

Appliquons ce résultat à la plaque plane ($k = 0$). D'après l'équation (5.30) et en tenant compte de la définition de la fonction de Kummer [25], on trouve :

$$(5.34) \quad \left(\frac{u}{u_e} \right)^2 = \left(\frac{\beta}{t} \right)^{2/3} e^{-\beta/t} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\beta}{t} \right)^r}{\Gamma\left(\frac{5}{3} + r\right)} .$$

On peut exprimer t en fonction de x par (5.31) et (5.24) :

$$(5.35) \quad \frac{\beta}{t} = 0,432 \left(\frac{\Psi}{\sqrt{x}} \right)^{3/2} .$$

Nous avons calculé $u(\eta)$ de la manière suivante : $\frac{u}{u_e}$ a été calculé en fonction de $\Psi/\sqrt{x}$ par la série (5.34), où le rapport β/t est remplacé par sa valeur tirée de (5.35); puis, η a été calculé en fonction de $\Psi/\sqrt{x}$ en utilisant les équations (4.20) et (5.34). Le résultat de cette intégration numérique est comparé (fig. 1) à la solution exacte de Blasius. L'écart est de 6%; on verra que la deuxième approximation permet de réduire à 1% cette erreur systématique.

CHAPITRE 6

Calcul des profils de concentration
dans le cas de la première approximation

6.1. Formule générale.-

Nous avons à intégrer l'équation :

$$(6.1) \quad \frac{\partial a_1}{\partial t} - \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\psi^{1/2} \frac{\partial a_1}{\partial \psi} \right) = 0 \quad ,$$

avec ses conditions aux limites :

$$(6.2) \quad \begin{cases} x = 0 & , & a_1 = 1 \\ \psi \rightarrow \infty & , & a_1 = 1 \\ \psi \rightarrow 0 & , & \lim_{\psi \rightarrow 0} \left(\frac{u}{Sc} \frac{\partial a_1}{\partial \psi} \right) = Da \cdot \lim_{\psi \rightarrow 0} (a_1) \end{cases} .$$

Pour avoir une condition de nullité à l'extérieur de la couche limite, posons :

$$(6.3) \quad \theta_1 = a_1 - 1 \quad .$$

Les conditions aux limites (6.2) deviennent :

$$(6.4) \quad \begin{cases} \theta_1(0, \psi) = \theta_1(t, \infty) = 0 \\ \lim_{\psi \rightarrow 0} [\theta_1(t, \psi)] = \theta_p(t) \end{cases} ,$$

θ_p étant relié au flux par l'équation (6.2).

L'équation (6.1) devient :

$$(6.5) \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial t} = \frac{1}{s_c} \frac{\partial}{\partial \psi} (\psi^{1/2} \frac{\partial \theta_1}{\partial \psi})$$

Eliminons, en utilisant le calcul symbolique, la dérivation par rapport à la variable t .

En employant la formule de Carson, l'équation (6.1) devient :

$$(6.6) \quad p \mathcal{G}_1 - \frac{1}{s_c} \frac{\partial}{\partial \psi} (\psi^{1/2} \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial \psi}) = 0$$

Prenons comme nouvelle variable :

$$(6.7) \quad s' = \frac{4}{3} s_c^{1/2} p^{1/2} \psi^{3/4}$$

et comme nouvelle fonction :

$$(6.8) \quad V_1(p, s') = s'^{1/3} \mathcal{G}_1(p, \psi) ;$$

divisons l'équation par $p s'^{1/3}$; nous obtenons une équation de Bessel sans second membre :

$$(6.9) \quad \frac{\partial^2 V_1}{\partial s'^2} + \frac{1}{s'} \frac{\partial V_1}{\partial s'} - (1 + \frac{1}{9 s'^2}) V_1 = 0 ,$$

avec les conditions aux limites :

$$(6.10) \quad \begin{cases} \lim_{s' \rightarrow 0} [s'^{1/3} V_1(p, s')] = \mathcal{S}(p) \subset \theta_p(t) \\ \lim_{s' \rightarrow \infty} [s'^{1/3} V_1(p, s')] = 0 \end{cases}$$

La solution de l'équation (6.9) avec les conditions aux limites (6.10) s'écrit :

$$(6.11) \quad V_1(p, s') = \frac{\Gamma(2/3)}{2^{1/3}} \frac{\sqrt{3}}{\pi} \mathcal{S}(p) K_{1/3}(s') .$$

Revenons à $\mathcal{C}_1(p, \psi)$, avec les variables p et ψ :

$$(6.12) \quad \mathcal{C}_1(p, \psi) = \frac{\Gamma(2/3)}{2^{1/3}} \frac{\sqrt{3}}{\pi} S_c^{1/6} \left(\frac{4}{3}\right)^{1/3} p^{1/6} \psi^{1/4} \mathcal{J}'_{1/3} \left(K_{1/3} \left(\frac{4}{3}\right) S_c^{1/2} \psi^{3/4} p^{1/2} \right)$$

Le champ des concentrations sera l'original de cette expression. Il peut être obtenu à l'aide des formules suivantes :

$$(6.13) \quad F(p) \subset G(p) \subset \int_0^t f(t - t') dg(t') ,$$

lorsque

$$F(p) \subset f(t) \quad \text{et} \quad G(p) \subset g(t) .$$

Nous poserons :

$$(6.14) \quad G(p) = \mathcal{J}'(p) ,$$

d'où :

$$(6.15) \quad g(t) = \theta_p(t) = \theta_1(t, 0)$$

et :

$$(6.16) \quad F(p) = 2 \sqrt{\alpha} p^{1/6} K_{1/3}(2 \sqrt{\alpha} p^{1/2}) ,$$

avec

$$(6.17) \quad \alpha = \left(\frac{2}{3}\right)^2 S_c \psi^{3/2}$$

Nous savons que [26] :

$$(6.18) \quad 2 \alpha^{1/2} p^{k+(1/2)} K_{2\mu}(2 \alpha^{1/2} p^{1/2}) \subset t^{-k} \exp\left(-\frac{\alpha}{2t}\right) W_{k, \mu}\left(\frac{\alpha}{t}\right)$$

où $W_{k, \mu}$ est la fonction de WHITTAKER [25] .

Pour calculer l'original $f(t)$ de la fonction $F(p)$ donnée par la formule (6.16), il faut poser, dans (6.18),

$$(6.19) \quad \mu = \frac{1}{6}$$

et

$$(6.20) \quad k = -\frac{1}{3},$$

d'où :

$$(6.21) \quad f(t) = t^{1/3} e^{-\alpha/2t} W_{-1/3, 1/6} \left(\frac{\alpha}{t} \right).$$

Développons $W_{-1/3, 1/6} (\alpha/t)$ à l'aide des relations entre les fonctions hypergéométriques confluentes [25] :

$$(6.22) \quad W_{k, \mu}(z) = e^{-z/2} z^{(1/2)+\mu} \mathcal{U} \left(\frac{1}{2} + \mu - k, 1 + 2\mu, z \right),$$

où :

$$(6.23) \quad \mathcal{U}(c, b, z) = \frac{\pi}{\sin \pi b} \left[\frac{\mathcal{M}(c, b, z)}{\Gamma(1+c-b) \Gamma(b)} - z^{1-b} \frac{\mathcal{M}(1+c-b, 2-b, z)}{\Gamma(c) \Gamma(2-b)} \right],$$

avec :

$$(6.24) \quad \mathcal{M}(e, f, z) = \frac{\Gamma(f)}{\Gamma(e)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(e+r)}{\Gamma(f+r)} \cdot \frac{z^r}{r!}.$$

On obtient enfin :

$$(6.25) \quad f(t) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{\alpha^{1/3}}{\Gamma(2/3)} \left[1 - \left(\frac{\alpha}{t} \right)^{1/3} e^{-\alpha/t} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\alpha}{t} \right)^r}{\Gamma\left(\frac{4}{3} + r\right)} \right].$$

L'expression (6.25) n'est autre que le quotient par $\Gamma(1/3)$ de la fonction eulérienne incomplète de deuxième espèce $\Gamma\left(\frac{1}{3}, \frac{\alpha}{t}\right)$, dont la définition est [25] :

$$(6.26) \quad \Gamma\left(\frac{1}{3}, z\right) = \int_z^{\infty} e^{-r} r^{-2/3} dr.$$

On peut écrire l'expression (6.12) sous la forme :

$$(6.27) \quad \mathcal{G}_1(p, \psi) = \frac{A}{2\sqrt{\alpha}} \mathcal{S}(p) \cdot 2\sqrt{\alpha} p^{1/6} K_{1/3}(2\alpha^{1/2} p^{1/2}) ,$$

avec :

$$(6.28) \quad A = \frac{\Gamma(2/3) \sqrt{3}}{2^{1/3} \pi} S_c^{1/6} \left(\frac{4}{3}\right)^{1/3} \psi^{1/4}$$

D'où, en portant (6.15) et (6.25) dans (6.13),

$$(6.29) \quad \theta_1(t, \psi) = \int_0^t \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}, \frac{\alpha}{t-t'}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} dt' \left[\theta_{p1}(t') \right] ,$$

expression qui vérifie bien les conditions aux limites, à savoir :

$$\text{si } \psi \rightarrow \infty, \quad \alpha \rightarrow \infty \quad \text{et} \quad \theta_1(t, \psi) \rightarrow 0$$

$$\text{puisque } \Gamma\left(\frac{1}{3}, \frac{\alpha}{t-t'}\right) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \alpha \rightarrow \infty .$$

Cherchons une expression de $\theta_1(t, \psi)$ qui soit une fonctionnelle de $\theta_{p1}(t)$. Intégrons par parties (6.29) :

$$(6.30) \quad \theta_1(t, \psi) = \left[\frac{\theta_{p1}(t') \Gamma\left(\frac{1}{3}, \frac{\alpha}{t-t'}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \right]_0^t - \int_0^t \frac{\theta_{p1}(t')}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \cdot \frac{d}{dt'} \left[\Gamma\left(\frac{1}{3}, \frac{\alpha}{t-t'}\right) \right] dt' .$$

Comme l'on a, pour $t' = 0$,

$$(6.31) \quad \theta_{p1} = (\theta_p)_{x=0}^* ,$$

et lorsque $t' \rightarrow t$,

$$\frac{\alpha}{t-t'} \rightarrow \infty, \quad \Gamma\left(\frac{1}{3}, \frac{\alpha}{t-t'}\right) \rightarrow 0 ,$$

il vient, compte tenu de la définition (6.26),

$$(6.32) \quad \theta_1(t, \psi) = - \frac{\alpha^{1/3}}{\Gamma(1/3)} \int_0^t \theta_{p1}(t') e^{-\alpha/t-t'} (t-t')^{-4/3} dt' - \frac{\theta_{p1}(0) \Gamma(\frac{1}{3}, \frac{\alpha}{t})}{\Gamma(1/3)},$$

avec

$$\alpha = \left(\frac{2}{3}\right)^2 Sc \psi^{3/2}.$$

Le degré d'approximation numérique de la formule (6.32) est examiné dans les cas où les profils de concentration sont en similitude et ont pu être calculés d'une façon exacte.

6.2. Cas particulier de la similitude.-

6.2.1. Cas particulier d'une concentration constante à la paroi.-

Nous avons alors :

$$\theta_1(t, 0) = Cte.$$

L'équation (6.29) et la définition de l'intégrale de Stieltjes conduisent à :

$$(6.33) \quad \frac{\theta_1(t, \psi)}{\theta_1(t, 0)} = 1 - e^{-\alpha/t} \left(\frac{\alpha}{t}\right)^{1/3} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\alpha}{t}\right)^r}{\Gamma(\frac{4}{3} + r)} = \frac{\Gamma(\frac{1}{3}, \frac{\alpha}{t})}{\Gamma(\frac{1}{3})}.$$

L'expression $\theta_1(t, \psi)/\theta_1(t, 0)$ ne dépend que de α/t , quelle que soit la forme du corps.

Les profils de concentration réduite $\theta_1(t, \psi)/\theta_1(t, 0)$ sont en similitude dans le plan (t, ψ) . En particulier, pour une plaque plane (sans gradient de pression), nous aurons [23] :

$$(6.34) \quad t^{2/3} = \left(\frac{4}{3}\right)^{2/3} 2^{1/3} (0,311)^{1/3} x_1^{1/2},$$

d'où :

$$(6.35) \quad \frac{\alpha}{t} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 Sc \left(\frac{\Psi}{t^{2/3}}\right)^{3/2},$$

ou encore :

$$(6.36) \quad \frac{\alpha}{t} = 0,596 Sc \left(\frac{\Psi}{\sqrt{2x^{(1)}}}\right)^{3/2};$$

$\Psi/\sqrt{2x^{(1)}}$ est une fonction de $\eta^{(1)} = y^{(1)}/\sqrt{2x^{(1)}}$ définie⁽¹⁾ par :

$$(6.37) \quad \eta^{(1)} = \int_0^{\Psi/\sqrt{2x^{(1)}}} \frac{d(\Psi/\sqrt{2x^{(1)}})}{u_1},$$

avec :

$$(6.38) \quad u_1^2 = P(z') \equiv z'^{2/3} e^{-z'} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z'^r}{\Gamma(\frac{5}{3} + r)},$$

et

$$(6.39) \quad z' = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{\Psi^{3/2}}{t} = \frac{\alpha}{t - Sc} = 0,425 \sqrt{2} \left(\frac{\Psi}{\sqrt{2x^{(1)}}}\right)^{3/2}.$$

La concentration réduite ne dépend que de $\eta^{(1)}$ et de Sc . Les profils de concentration réduite sont donc, dans le cadre de la première approximation, en similitude dans le plan (x,y) .

Nous avons tracé, sur la figure 2, les profils de concentration réduite obtenus en fonction de différents nombres de Schmidt.

6.2.2. Calcul des profils de concentration dans le cas d'une plaque plane avec distribution de concentration pariétale réduite en puissance de l'abscisse.-

Soit maintenant :

$$(6.40) \quad \theta_p(x) = b x^{\frac{1}{2}}.$$

.../...

(1) Les indices supérieurs sur les coordonnées indiquent l'ordre des transformations (4.19) et (4.20) utilisées pour revenir du plan auxiliaire (t,Ψ) au plan physique (x,y) .

D'après (6.34), nous obtenons :

$$(6.41) \quad \theta_{p1}(t) = b^* t^{4\ell/3} \quad .$$

Portons (6.41) dans (6.32) :

$$(6.42) \quad \frac{\theta_1(t, \psi)}{b^*} = \frac{\alpha^{1/3}}{\Gamma(1/3)} \int_0^t t^{4\ell/3} e^{-\alpha/(t-t')} (t-t')^{-4/3} dt' \quad .$$

En posant $\beta = t/(t-t')$, et en utilisant (6.23) et :

$$(6.43) \quad \Gamma(c) \mathcal{U}(c, b, z) = e^z \int_1^\infty e^{-z\beta} (\beta-1)^{c-1} \beta^{b-c-1} d\beta \quad ,$$

nous obtenons :

$$(6.44) \quad \frac{\theta_1(t, \psi)}{\theta_1(t, 0)} = - \frac{e^{-\alpha/t} \Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(2 + \frac{4\ell}{3} - \frac{4}{3})} \left[\left(\frac{\alpha}{t} \right)^{1/3} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1 + \frac{4\ell}{3} + r)}{(\frac{2}{3} + r)} \cdot \frac{(\frac{\alpha}{t})^r}{r!} - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2 + \frac{4\ell}{3} - \frac{4}{3} + r)}{\Gamma(\frac{2}{3} + r)} \frac{(\frac{\alpha}{t})^r}{r!} \right] \quad .$$

Nous voyons que cette solution ne dépend que de α/t , c'est-à-dire de $\eta^{(1)}$ et de Sc .

Les figures 3, 4, 5 et 6 donnent les profils de concentration réduite dans la couche limite pour différentes valeurs de ℓ et de Sc .

6.3. Cas d'une réaction du premier ordre à la paroi sur une plaque plane.-

6.3.1. Calcul de la distribution de la concentration sur la paroi.-

Un développement limité au voisinage de la paroi de l'expression (6.29) nous donne :

$$(6.45) \quad \varphi_{p1}(t) = \frac{2^{1/6} 3^{1/3} Sc^{-2/3}}{\Gamma(\frac{1}{3})} [\tau_{p1}(t)]^{1/2} \int_0^t (t-t')^{-1/3} d[a_{p1}(t')] \quad$$

ou la relation inverse :

$$(6.46) \quad \theta_{p1}(t) = \frac{Sc^{2/3}}{2^{1/6} 3^{1/3} \Gamma(\frac{2}{3})} \int_0^t (t - t')^{-2/3} \frac{\varphi_{p1}(t')}{[\tau_{p1}(t')]^{1/2}} dt'.$$

La connaissance de la loi cinétique à la paroi $\varphi_p(a_p)$ permettra de calculer la concentration pariétale par la résolution d'une équation intégrale.

Dans le cas d'une réaction catalytique du premier ordre, on montre que le seul paramètre qui intervient est le produit du nombre de Damköhler par le nombre de Schmidt à la puissance deux tiers, soit :

$$(6.47) \quad a_{p1}(x) = 1 - \frac{(Da Sc^{2/3})}{3^{1/3} \Gamma(2/3)} \int_0^x \left[\int_{x'}^x (\tau_{p1}(x''))^{1/2} dx'' \right]^{-2/3} a_{p1}(x') dx'.$$

En particulier, deux problèmes admettront la même solution pariétale en variables réduites, si le produit $Da \cdot Sc^{2/3}$ est le même.

Dans le cas d'une plaque plane, la tension de frottement pariétale obtenue à partir de (5.27) est, sous forme non dimensionnelle,

$$(6.48) \quad \tau_{p1} = \frac{3^{1/4}}{2^{7/4}} \left(\frac{1}{\Gamma(2/3)} \right)^{3/4} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{0,311}{\sqrt{x}}.$$

Portons cette expression dans (6.47) et intégrons l'intégrale :

$$\int_{x'}^x [\tau_{p1}(x'')]^{1/2} dx'' \quad ;$$

il vient :

$$(6.49) \quad a_{p1}(x) = 1 - \frac{E}{4 \Gamma(4/3) \Gamma(2/3)} \frac{1}{x^{1/2}} \int_0^x \left[1 - \left(\frac{x'}{x} \right)^{3/4} \right]^{-2/3} a_{p1}(x') dx'$$

où

$$E = \frac{12^{1/3}}{(0,311)^{1/3}} \Gamma(4/3) Da Sc^{2/3}.$$

L'équation précédente est une intégrale de Volterra de seconde espèce que nous avons résolue par la méthode classique. Le résultat est une série de la forme (6.51) uniformément convergente [27], quel que soit le paramètre,

$$(6.50) \quad \lambda = - \frac{B}{4 \Gamma(4/3) \Gamma(2/3)},$$

$$(6.51) \quad a_{p1}(x) = a_{p1}^0(x) + \lambda a_{p1}^{(1)}(x) + \dots + \lambda^n a_{p1}^{(n)}(x) + \dots ;$$

en identifiant terme à terme les coefficients en λ^n de la série (6.51) portée dans (6.48), on obtient :

$$(6.52) \quad a_{p1}^{(n)}(x) = \int_0^x x^{-1/2} \left[1 - \left(\frac{x'}{x} \right)^{3/4} \right]^{-2/3} a_{p1}^{(n-1)}(x') dx' ,$$

d'où

$$(6.53) \quad a_{p1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x) ,$$

avec

$$(6.54) \quad \alpha_n(x) = (-1)^n \left(\frac{3E}{2\Gamma(2/3)} \right)^n \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}(n+1)\right)}{\Gamma(2/3)} \frac{x^{n/2}}{n!} .$$

L'examen de cette série montre que toutes les distributions de concentration pariétale réduite peuvent se déduire les unes des autres. En effet, si l'on pose :

$$(6.55) \quad Z' = E \sqrt{x} ,$$

on a :

$$(6.56) \quad \alpha_n(Z') = (-1)^n \left[\frac{3}{2\Gamma(2/3)} \right]^n \cdot \frac{\Gamma\left[\frac{2}{3}(n+1)\right]}{\Gamma(2/3)} \cdot \frac{Z'^n}{n!}$$

et

$$(6.57) \quad a_{p1}(Z') = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(Z') .$$

Nous avons tracé (fig. 7) $a_{p1}(Z')$ en fonction de Z' . La courbe prend la valeur 1 pour $Z' = 0$ et tend asymptotiquement vers zéro quand Z' tend vers l'infini. A l'origine des abscisses, la concentration pariétale est égale à la valeur à l'infini et elle tend vers la concentration d'équilibre lorsque x croît indéfiniment.

CHAMBRE² et ACRIVOS [7] sont arrivés à un résultat semblable par une autre méthode, qui suppose que le nombre de Schmidt est suffisamment grand, et qui utilise, à la place de (6.48), la valeur exacte de la tension de frottement pariétale

$\tau_p = 0,332 x^{-1/2}$. Nous discuterons la validité de la première approximation en la comparant avec les résultats de la deuxième approximation, et nous comparerons ce résultat avec les points expérimentaux de l'analogie thermique (chapitre 9).

6.3.2. Profil de concentration dans la couche limite.

Portons la valeur de x , tirée de (6.34), dans la série (6.54); nous obtenons :

$$(6.58) \quad \theta_1(t, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n C_n t^{2n/3} \quad ,$$

et portons (6.58) dans (6.32) :

$$(6.59) \quad \theta_1(t, \psi) = \frac{\alpha^{1/3}}{\Gamma(1/3)} \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n C_n t^{2n/3} e^{-\alpha/(t-t')} (t-t')^{-4/3} dt' \quad .$$

Intervertissons le signe somme de la série et de l'intégrale, puisqu'elles sont uniformément convergentes.

Il vient :

$$(6.60) \quad \theta_1(t, \psi) = \frac{\alpha^{1/3}}{\Gamma(1/3)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n C_n \int_0^t t^{2n/3} e^{-\alpha/(t-t')} (t-t')^{-4/3} dt' \quad .$$

Posons ,

$$(6.61) \quad u = \frac{t}{t-t'} \quad ;$$

il vient :

$$(6.62) \quad \theta_1(t, \psi) = \frac{\alpha^{1/3}}{\Gamma(1/3)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n C_n t^{2n-1/3} \int_1^{\infty} (u-1)^{2n/3} e^{-\alpha u/t} u^{-2(n+1)/3} du \quad .$$

Si l'on utilise (6.48), l'expression (6.60) devient :

$$(6.63) \quad \theta_1(t, \psi) = \frac{\alpha^{1/3}}{\Gamma(1/3)} e^{-\alpha/t} t^{-1/3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n C_n t^{2n/3} \Gamma\left(1 + \frac{2n}{3}\right) \mathcal{U}\left(1 + \frac{2n}{3}, \frac{4}{3}, \frac{\alpha}{t}\right) ,$$

soit, en développant avec les formules (6.23) et (6.24),

$$(6.64) \quad \theta_1(t, \psi) = e^{-\alpha/t} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{C_n t^{2n/3}}{\Gamma(\frac{2n}{3} + \frac{2}{3})} \left[\left(\frac{\alpha}{t}\right)^{1/3} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1 + \frac{2n}{3} + r)}{\Gamma(\frac{4}{3} + r)} \frac{(\frac{\alpha}{t})^r}{r!} - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{2n}{3} + \frac{2}{3} + r)}{\Gamma(\frac{2}{3} + r)} \frac{(\frac{\alpha}{t})^r}{r!} \right] ;$$

sur la figure 8, nous avons porté a_1 en fonction de $y^{(1)}$ pour différentes valeurs de $x^{(1)}$ et pour $Da = 8.10^{-3}$, $Sc = 0,7$, ainsi que les points expérimentaux obtenus par analogie thermique (chapitre 9).

Compte tenu de l'erreur systématique due à la première approximation et des erreurs expérimentales, les calculs théoriques sont assez bien vérifiés par l'expérience.

6.4. Etude d'un "sillage catalytique".-

Supposons une réaction catalytique s'effectuant dans une région dont tous les points sont au plus à une distance L du bord d'attaque, c'est-à-dire que le flux de masse est nul en tout point x d'abscisse supérieure à L .

L'intégrale (6.46) se décompose en deux parties, de 0 à L et de L à x , la deuxième étant nulle puisque, dans cet intervalle, $\psi_p = 0$.

En posant :

$$(6.65) \quad \frac{x}{L} = \xi$$

pour x supérieur à L , on a :

$$(6.66) \quad a_{p1}(x) = 1 - \frac{E \sqrt{L}}{4 \Gamma(4/3) \Gamma(2/3)} \left(\frac{L}{x}\right)^{1/2} \int_0^1 \left[1 - \left(\xi' \frac{L}{x}\right)^{3/4}\right]^{-2/3} a_{p1}(\xi') d\xi',$$

où $a_{p1}(\xi)$ est défini à partir de (6.54), soit :

$$(6.67) \quad a_{p1}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{3}{2} - \frac{E \sqrt{L}}{\Gamma(2/3)}\right]^n \frac{1}{\Gamma(2/3)} \frac{\Gamma(\frac{2}{3}(n+1))}{n!} \xi^{n/2}.$$

La solution du problème se réduit à l'intégration entre $\xi = 0$ et $\xi = 1$ du produit du développement limité de $\left[1 - \left(\xi \frac{L}{x}\right)^{3/4}\right]^{-2/3}$ par $a_{p1}(\xi)$.

donc :

$$(6.68) \quad R(\xi) = \left[1 - \left(\xi \frac{L}{x} \right)^{3/4} \right]^{-2/3} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{3i} \right) \right] \left(\frac{L}{x} \right)^{3n/4} \xi^{3n/4}$$

ou :

$$(6.69) \quad R(\xi) = R_1 + R_2 \xi^{3/4} + \dots + R_n \xi^{3(n-1)/4}$$

et

$$(6.70) \quad a_{p1}(\xi) = S_1 + S_2 \xi^{2/4} + \dots + S_n \xi^{2n/4}$$

Le produit des séries $a_{p1}(\xi)$ par $R(\xi)$ s'exprime par la formule suivante :

$$(6.71) \quad R_1 S_1 + \dots + \sum_{j=1}^q R_{2j-1} S_{(p/2)-3j+4} \xi^{p/4} + \sum_{j=1}^r R_{2j} S_{[(p-1)/2]-3j+3} \xi^{p/4}$$

$\downarrow$ dans ce terme p est pair $\downarrow$ dans ce terme p est impair

q est la partie entière de $4 + (p/2)/3$ et r, la partie entière de $[3 + (p-1)/2]/3$; l'intégration de ce produit de séries, entre ξ égal à zéro et ξ égal à 1, nous donne :

$$(6.72) \quad \int_0^1 R(\xi) a_{p1}(\xi) d\xi = R_1 S_1 + \dots + \sum_{j=1}^q R_{2j-1} S_{(p/2)-3j+4} \frac{1}{\frac{p}{4} + 1} \quad (p \text{ pair})$$

$$+ \sum_{j=1}^r R_{2j} S_{[(p-1)/2]-3j+3} \frac{1}{\frac{p}{4} + 1} \quad (p \text{ impair})$$

De la valeur de cette intégrale, on déduit $a_{p1}(\xi)$ pour $\xi > 1$. Les résultats obtenus ont été donnés pour différentes valeurs de $E\sqrt{L}$ sur la figure 9. En partant cette valeur de $a_{p1}(\xi)$ dans (6.32), nous obtenons les profils dans la couche limite avec les paramètres de l'analogie thermique (chapitre 9) (fig. 10 et 11).

Les calculs ont été effectués sur machine électronique de la façon suivante :

$$\text{calcul de } S(n) = (-1)^n \left[\frac{3}{2} - \frac{E\sqrt{3}}{\Gamma(2/3)} \right]^n \frac{1}{\Gamma(2/3)} \frac{\Gamma\left[\frac{2}{3}(n+1)\right]}{n!};$$

l'expression précédente se déduit de $S(n)$ par la relation de récurrence :

$$(6.73) \quad S_{(n+1)} = S_{(n)} (-1)^{\frac{3}{2}} \frac{E \sqrt{L}}{\Gamma(2/3)} \frac{1}{n} \frac{\Gamma\left[\frac{2}{3}(n+1)\right]}{\Gamma\left(\frac{2}{3}n\right)}, \text{ avec } S_1 = 1 ;$$

calcul de $R_{(n)}$;

$R_{(n+1)}$ se déduit de $R_{(n)}$ par la relation de récurrence :

$$(6.74) \quad R_{(n+1)} = R_{(n)} \left(1 - \frac{1}{3n}\right) \left(\frac{L}{x}\right)^{3/4}, \text{ avec } R_1 = 1 .$$

Pour chaque valeur du paramètre $E\sqrt{L}$, on a fait varier x/L .

6.5. Cas de discontinuités quelconques de catalyseur et d'une réaction d'ordre quelconque.-

6.5.1. Méthode d'intégration générale.-

Prenons le cas de discontinuités quelconques, c'est-à-dire que nous imposons, sur certains intervalles de x , un flux nul.

Nous noterons :

$$\varphi_p = Da(x) \cdot a(x) ,$$

$Da(x)$ étant constant sur les zones de catalyse et nul ailleurs. On pourrait aussi choisir $Da(x)$ variant d'une façon continue, ce qui correspondrait à un problème où les phénomènes thermiques interviendraient.

Prenons un point x_1 voisin de l'origine et appelons l l'intervalle compris entre l'origine et x_1 ; cherchons α_1 et b_1 tels que la concentration dans cet intervalle soit représentée par le polynôme :

$$(6.75) \quad \alpha_1 + b_1 x^p .$$

On choisira p arbitraire positif pour que la condition à l'origine soit satisfaite :

$$(6.76) \quad a_{p1}(0) = 1 = \alpha_1 ;$$

dans cet intervalle $[0, x_1]$, $a_{p1}(x)$ vérifie l'équation générale :

$$(6.77) \quad a_{p1}(x) = 1 - \frac{E}{4 \Gamma(4/3) \Gamma(2/3)} \frac{1}{x^{1/2}} \int_0^x \left[1 - \left(\frac{x'}{x} \right)^{3/4} \right]^{-2/3} (\alpha_1 + b_1 x'^p) dx'.$$

En particulier, au point x_1 , nous aurons :

$$(6.78) \quad \alpha_1 + b_1 x_1^p = 1 - \frac{E}{4 \Gamma(\frac{4}{3}) \Gamma(\frac{2}{3})} \frac{1}{x_1^{1/2}} \left[\alpha_1 \int_0^{x_1} \left(1 - \left(\frac{x'}{x_1} \right)^{3/4} \right)^{-2/3} dx' + b_1 \int_0^{x_1} \left(1 - \left(\frac{x'}{x_1} \right)^{3/4} \right)^{-2/3} x'^p dx' \right].$$

Soient N_1 et M_1 les deux intégrales calculées numériquement, on a :

$$(6.79) \quad \alpha_1 + b_1 x_1^p = 1 - \frac{E}{4 \Gamma(\frac{4}{3}) \Gamma(\frac{2}{3})} \frac{1}{x_1^{1/2}} (\alpha_1 N_1 + b_1 M_1).$$

Puisque l'on connaît α_1 , on détermine, par cette équation, b_1 , puis $a_{p1}(x_1) = \alpha_1 + b_1 x_1^p$.

Cas général : Découpons l'intervalle $[0, x]$ en n petits éléments et, de proche en proche, calculons les coefficients α_n et b_n pour que, dans le $n^{\text{ième}}$ petit élément, la concentration soit représentée par le polynôme :

$$(6.80) \quad a_{p1}(x) = \alpha_n + b_n x^p.$$

Supposons connus tous les α_i et b_i pour $i < n$; nous aurons :

$$(6.81) \quad a_{p1}(x) = 1 - \frac{E}{4 \Gamma(4/3) \Gamma(2/3)} \frac{1}{x^{1/2}} \int_0^x \left[1 - \left(\frac{x'}{x} \right)^{3/4} \right]^{-2/3} \cdot Da(x') \cdot a_{p1}(x') dx'.$$

Décomposons l'intégrale $\int_0^x$ en n intégrales; puisque nous connaissons des polynômes qui représentent $a_{p1}(x')$ dans ces intervalles, nous aurons pour le point d'abscisse x_n ,

$$(6.82) \quad \alpha_n + b_n x_n^p = 1 - \frac{E}{4 \Gamma(4/3) \Gamma(2/3)} \frac{1}{x_n^{1/2}} \left[\int_0^{x_1} \left(1 - \left(\frac{x'}{x_n} \right)^{3/4} \right)^{-2/3} \cdot Da(x') (\alpha_1 + b_1 x'^p) dx' + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} \left(1 - \left(\frac{x'}{x_n} \right)^{3/4} \right)^{-2/3} \cdot Da(x') (\alpha_n + b_n x'^p) dx' \right] ;$$

x_n étant donné, en calculant toutes les intégrales $N_{i,n}$, $M_{i,n}$ ($i < n$), etc., on trouve une relation entre α_n et b_n . La dernière relation est donnée par la continuité de la courbe, c'est-à-dire :

$$(6.83) \quad a_{p1}(x_{n-1}) = \alpha_n + b_n x_{n-1}^p ;$$

la valeur $a_{p1}(x_{n-1})$ a été calculée précédemment.

Connaissant α_n et b_n , on en déduit $a_{p1}(x_n)$.

Les fonctions à intégrer présentant une singularité pour $x' = x_n$, nous avons levé l'indétermination en posant $1 - (x'/x_n)^{3/4} = z^3$. Chaque intégrale devient :

$$(6.84) \quad \int_{w_1}^{w_2} (1 - z^3)^{(4p+1)/3} x_n^{p+1} dz ,$$

ce qui s'intègre numériquement, quelles que soient les bornes, si $4p + 1 \geq 0$, soit $p \geq -1/4$.

6.5.2. Résultats.-

a) Nous avons d'abord calculé, par cette méthode, les distributions de concentrations dans les cas d'une répartition continue du catalyseur (fig. 7) et d'un sillage catalytique (fig. 10). Les résultats numériques correspondent, au millième près, aux calculs obtenus par les séries (6.56) et (6.67).

b) Supposons maintenant que la paroi soit d'abord non catalytique sur une distance L , c'est-à-dire $\varphi_p = 0$, puis catalytique. En intégrant numériquement l'équation (6.46) par la méthode précédente, nous obtenons les courbes de la figure 12. On voit, sur cette figure, que la concentration pariétale $a_{p1}(x)$ ne

dépend que du paramètre $E\sqrt{L}$ et de l'abscisse x/L . En portant la valeur de $\theta_{pl}(t)$ dans l'équation (6.30), on obtient les profils dans la couche limite. Nous donnons sur les figures 13 et 14 les résultats de l'analogie thermique.

c) Supposons que l'on ait, sur une plaque catalytique, une interruption, puis une reprise de la catalyse. Nous aurons, pour solution, des courbes du type de celles de la figure 15.

Pour une valeur suffisamment grande de $E\sqrt{L}$ et pour une distance assez grande du bord d'attaque, on trouve que l'on peut ainsi augmenter le flux de masse par unité de surface. Ce résultat a été obtenu (fig. 16) en comparant les aires S_1 et S_2 pour $E\sqrt{L} = 8$. Il est dû au changement brutal de pente de la courbe $a(x)$ à l'endroit de la discontinuité.

d) Supposons enfin que l'on ait une réaction d'ordre n , c'est-à-dire que le flux de masse soit une fonction de la concentration de la forme :

$$\varphi = Da' \cdot a^n \quad .$$

On peut porter cette expression dans l'équation intégrale (6.45) et la résoudre par la méthode précédente.

Sur la figure 17, nous avons donné en exemple, pour $Da' = 8 \cdot 10^{-3}$, les courbes obtenues lorsque n varie de 0,2 à 2.

La courbe obtenue avec $n = 1$ a été comparée avec le résultat $a(Z'(x))$ tiré de la figure 7. Les résultats coïncident au millièmè près.

6.6. Conclusion.-

Cette méthode d'intégration s'adapte à tous les problèmes de réaction catalytique. En résolvant simultanément l'équation de la diffusion et de l'énergie, nous résoudrons un problème de transfert de chaleur et un problème de transfert de masse couplés entre eux à la paroi. Chaque fois que nous avons pu comparer nos résultats avec des travaux antérieurs [7], [10], [12], nous avons retrouvé les mêmes distributions pariétales.

CHAPITRE 7

Deuxième approximation dynamique

Dans le cas de l'équation de la quantité de mouvement, l'approximation d'ordre $i + 1$ sera solution de l'équation suivante :

$$(7.1) \quad \frac{\partial Z_{i+1}}{\partial t} - \psi^{1/2} \frac{\partial^2 Z_{i+1}}{\partial \psi^2} = \left[\frac{u_i}{(2 \tau_{p1})^{1/2}} - \psi^{1/2} \right] \frac{\partial^2 Z_i}{\partial \psi^2} \quad .$$

La deuxième approximation $Z_2 (t, \psi)$ sera donc solution de l'équation :

$$(7.2) \quad \frac{\partial Z_2}{\partial t} - \psi^{1/2} \frac{\partial^2 Z_2}{\partial \psi^2} = \left[\frac{u_1}{(2 \tau_{p1})^{1/2}} - \psi^{1/2} \right] \frac{\partial^2 Z_1}{\partial \psi^2} \quad ,$$

avec les conditions aux limites :

$$(7.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow 0} Z_2 (t, \psi) = 0 \quad , \\ \lim_{\psi \rightarrow 0} Z_2 (t, \psi) = u_e^2 (t) \quad , \\ \lim_{\psi \rightarrow \infty} Z_2 (t, \psi) = 0 \quad . \end{array} \right.$$

Pour revenir au plan physique (x, y) , on emploiera la transformation :

$$(7.4) \quad x = x^{(2)} (t, \psi) = \int_0^t \frac{dt}{(2 \tau_{p2})^{1/2}} \quad ,$$

$$(7.5) \quad y = y^{(2)} (t, \psi) = \int_0^\psi \frac{d\psi}{u_2} \quad .$$

Remarquons que la condition imposée à la paroi pour la fonction $Z_2 (t, \psi)$ ne fait pas intervenir la même fonction $u_e^2 (t)$ que celle introduite dans la pre-

mière approximation, car le retour du plan auxiliaire (t, ψ) au plan physique se fait d'une façon différente (fig. 18).

Pour résoudre l'équation (7.2), cherchons une expression de la vitesse $u_1(t, \psi)$ sous la forme d'une série en $\psi^{n/2}$ [23] :

$$(7.6) \quad u_1(t, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(t) \psi^{n/2} \quad .$$

Nous savons que $Z_1 = u_e^2 - u_1^2$ est solution de l'équation :

$$(7.7) \quad \frac{\partial Z_1}{\partial t} - \psi^{1/2} \frac{\partial^2 Z_1}{\partial t^2} = 0 \quad .$$

Posons :

$$(7.8) \quad Z_1 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(t) \psi^{n/2} \quad .$$

Si l'on porte le développement en série de Z_1 dans l'équation (7.7), on trouve que les b_n satisfont à la relation de récurrence suivante :

$$(7.9) \quad \frac{4}{n(n-2)} \frac{d(b_{n-3})}{dt} = b_n \quad .$$

Compte tenu des conditions aux limites, on obtient :

$$(7.10) \quad b_0 = u_e^2(t) \quad , \quad b_1 = 0 \quad , \quad b_2 = -2 \tau_{p1}(t) \quad ,$$

d'où :

$$(7.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} b_{3i} = \frac{2^{2i}}{3^i i! \prod_{r=1}^i (3r-2)} \frac{d^i(u_e^2)}{dt^i} \quad , \\ b_{3i+1} = 0 \quad , \\ b_{3i+2} = \frac{2^{i+1}}{3^i i! \prod_{r=1}^i (3r+2)} \frac{d^i(\tau_{p1})}{dt^i} \quad . \end{array} \right.$$

D'après la définition de Z_1 , nous avons :

$$(7.12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \psi^{n/2} = - \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi^{n/2} \right]^2 .$$

En identifiant terme à terme, nous obtenons :

$$(7.13) \quad d_n = - \frac{b_{n+1}}{2 d_1} - \frac{1}{2 d_1} \sum_{p=1}^{n-2} d_{p+1} d_{n-p} , \quad n \geq 3 ,$$

avec :

$$(7.14) \quad d_1 = \sqrt{2 \tau_{p1}} , \quad d_2 = - \frac{b_3}{2 d_1} = - \frac{1}{3} \left(\frac{2}{\tau_{p1}} \right)^{1/2} \frac{d(u_e^2)}{dt} .$$

Portons (7.13) dans (7.2), le terme $(u_1 / \sqrt{2 \tau_{p1}}) - \psi^{1/2}$ devient :

$$(7.15) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_{n+1}}{d_1} \psi^{(n+1)/2} .$$

Posons :

$$(7.16) \quad \gamma_n(t) = \frac{d_{n+1}(t)}{d_1} = - \frac{b_{n+2}}{2 d_1^2} - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n-1} \gamma_p \gamma_{n-p} ,$$

avec :

$$(7.17) \quad \gamma_1 = - \frac{1}{3 \tau} \frac{d(u_e^2)}{dt} .$$

L'équation (7.2) devient, compte tenu de l'équation de la première approximation,

$$(7.18) \quad \frac{\partial Z_2}{\partial t} - \psi^{1/2} \frac{\partial^2 Z_2}{\partial \psi^2} = \frac{\partial Z_1}{\partial t} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(t_1) \psi^{n/2} .$$

Utilisons, comme dans la première approximation, la transformation de Carson et posons :

$$(7.19) \quad \mathcal{Z}_1(p, \psi) \subset Z_1(t, \psi) ,$$

$$(7.20) \quad \mathcal{Z}_2(p, \psi) \subset Z_2(t, \psi) ,$$

et :

$$(7.21) \quad p \gamma_n(p) \subset c_n(t) \quad .$$

Utilisons à présent le théorème de POLI [28] :

$$(7.22) \quad \frac{1}{t} f(t) G(t) \supset_p \int_p^\infty F(\lambda) g(\lambda - p) \frac{d\lambda}{\lambda} ,$$

avec :

$$(7.23) \quad F(p) \subset f(t) \quad \text{et} \quad G(p) \subset g(t) \quad .$$

On a ici :

$$(7.24) \quad f(t) = \frac{\partial z_1}{\partial t} \quad \text{et} \quad g(t) = c_n(t) \quad .$$

Donc :

$$(7.25) \quad \frac{\partial z_1}{\partial t} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(t) \psi^{n/2} \supset_p \sum_{n=1}^{\infty} \psi^{n/2} \int_p^\infty c_n(\lambda - p) z_1(\lambda, \psi) d\lambda \quad .$$

Si l'on pose, comme dans la première approximation,

$$(7.26) \quad s = \frac{4}{3} p^{1/2} \psi^{3/4}$$

et

$$(7.27) \quad Q_2(p, s) = s^{-2/3} z_2(p, \psi) \quad ,$$

on obtient l'équation :

$$(7.28) \quad \frac{\partial^2 Q_2}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial Q_2}{\partial s} - \left(1 + \frac{4}{9 s^2}\right) Q_2 = G_2(p, s) \quad .$$

On montre que :

$$(7.29) \quad G_2(p, s) = - \frac{3^{1/2}}{2^{2/3} \pi} \Gamma(1/3) p^{-1/3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{2n/3} p^{-n/3} s^{2n/3}$$

$$\int_0^{\infty} \lambda^{1/3} \xi(\lambda) c_n(\lambda - p) K_{2/3}\left(s \frac{\lambda^{1/2}}{p^{1/2}}\right) d\lambda, \quad ,$$

où

$$(7.30) \quad \xi(p) \subset u_e^2(t) \quad .$$

L'équation (7.28) se résout par la méthode de variation des constantes en tenant compte des conditions aux limites (7.3) transformées convenablement. Les détails de l'intégration sont donnés dans la référence [23].

Nous n'avons pas réussi à obtenir l'original de la solution $\mathcal{Z}_2(p, \psi)$, mais un développement en série de cette solution au voisinage de la paroi nous a fourni une relation entre la contrainte tangentielle pariétale τ_{p2} de la deuxième approximation et la distribution de vitesse u_e à l'extérieur de la couche limite:

$$(7.31) \quad \tau_{p2}(t) = \frac{1}{2^{2/3} 3^{1/3} \Gamma(2/3)} \int_0^t (t - t')^{-2/3} d[u_e^2(t')] - \frac{3^{1/6} \Gamma(1/3)}{2^{5/3} \pi \Gamma(2/3)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{2n/3} \Gamma\left(\frac{n}{3} + 1\right) \Gamma\left(\frac{n}{3} + \frac{5}{3}\right) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{3} + 1 + r\right)}{\Gamma\left(\frac{2n}{3} + 2 + r\right)} \frac{d^r \gamma_n(t)}{dt^r} \int_0^t (t - t')^{(n/3)+r-(2/3)} d[u_e^2(t')] \quad .$$

C'est une équation intégrale sous forme paramétrique, car on passe de la variable t à la variable x par la relation (7.4). Remarquons que l'équation est différente de celle de la référence [23].

Dans le cas de la plaque plane ($u_e = \text{Cte}$), l'équation intégrale (7.31) s'intègre facilement, et l'on trouve que :

$$(7.32) \quad C_{f2} Re_x^{-1/2} = 0,66107 \quad ,$$

ou

$$(7.33) \quad \frac{C_{f2}}{2} = \tau_{p2}^* \quad .$$

On voit que l'erreur par rapport à la valeur exacte 0,66412 est de l'ordre de 0,4%.

La première approximation avait donné :

$$(7.34) \quad C_{f1} Re_x^{-1/2} = 0,62340 \quad ,$$

d'où une erreur par défaut de 6,1%.

Comptons que la deuxième approximation exposée dans la référence [23] donne une valeur de 0,67415, c'est-à-dire avec une erreur par excès de 1,5%.

En conclusion, le nouveau processus d'intégration des équations de la couche limite laminaire par approximations successives exposé ci-dessus, non seulement est plus logique au point de vue formalisme que celui de la référence [23], mais conduit à une convergence numérique plus rapide.

Pour le calcul des profils de vitesse, on peut, à la place des profils exacts de la deuxième approximation, ajuster les profils obtenus dans le cadre de la première approximation en faisant une affinité dans le plan (t, ψ) , de telle façon que la contrainte tangentielle pariétale correspondant à ces nouveaux profils soit égale à τ_{p2} .

Dans le cas de la plaque plane, on a donc remplacé $u_1(t, \psi)$ tel qu'il est donné par (6.38) et (6.39) par :

$$(7.35) \quad \tilde{u}(t, \psi) = \left[P(\varepsilon, z') \right]^{1/2}$$

avec

$$(7.36) \quad \varepsilon = \frac{\tau_{p2}}{\tau_{p1}} = 1,061 \quad .$$

On trouve ainsi que le profil des vitesses réduites est une fonction

.../...

d'une nouvelle variable réduite :

$$(7.37) \quad \tilde{\eta} = \int_0^{\Psi} \frac{d(\Psi / \sqrt{2 x_2})}{\tilde{u}} \quad .$$

Il concorde, à moins de 1% près, avec le profil calculé par BLASIUS, comme on l'a montré dans la référence [29].

CHAPITRE 8

Deuxième approximation pour les profils de concentration

8.1. Résolution générale.-

Dans le chapitre 4, nous avons montré que l'approximation d'ordre $i + 1$ de la concentration est solution de l'équation :

$$(8.1) \quad \frac{\partial a_{i+1}}{\partial t} - \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\psi^{1/2} \frac{\partial a_{i+1}}{\partial \psi} \right) = \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\left(\frac{u_i}{(2 \tau_{pi})^{1/2}} - \psi^{1/2} \right) \frac{\partial a_i}{\partial \psi} \right],$$

où u_1 , τ_{pi} et a_i sont respectivement la vitesse, la contrainte à la paroi et la concentration, à l'approximation d'ordre i dans le plan (t, ψ) .

Pour la deuxième approximation, nous aurons donc :

$$(8.2) \quad \frac{\partial a_2}{\partial t} - \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\psi^{1/2} \frac{\partial a_2}{\partial \psi} \right) = \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\left(\frac{u_1}{(2 \tau_{p1})^{1/2}} - \psi^{1/2} \right) \frac{\partial a_1}{\partial \psi} \right].$$

Posons :

$$(8.3) \quad \theta_2 = a_2 - 1 \quad ;$$

nous obtenons :

$$(8.4) \quad \frac{\partial \theta_2}{\partial t} - \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\psi^{1/2} \frac{\partial \theta_2}{\partial \psi} \right) = \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\left(\frac{u_1}{(2 \tau_{p1})^{1/2}} - \psi^{1/2} \right) \frac{\partial \theta_1}{\partial \psi} \right],$$

avec, comme conditions aux limites, lorsque la concentration pariétale est im-

sée :

$$(8.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow 0} \theta_2(t, \psi) = 0 \quad , \\ \lim_{\psi \rightarrow 0} \theta_2(t, \psi) = 0 \quad , \\ \lim_{\psi \rightarrow \infty} \theta_2(t, \psi) = \theta_p(t) \quad . \end{array} \right.$$

Le cas d'une densité pariétale de flux de masse imposée, ou celui d'une relation⁽¹⁾ entre cette densité de flux et la concentration pariétale se traite d'une façon analogue en modifiant la dernière condition du système (8.5).

Compte tenu de la définition des γ_n (cf. 7.16 et 7.17), l'équation (8.4) devient :

$$(8.6) \quad \frac{\partial \theta_2}{\partial t} - \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\psi^{1/2} \frac{\partial \theta_2}{\partial \psi} \right) = \frac{1}{Sc} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(t) \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\psi^{(n+1)/2} \frac{\partial \theta_1}{\partial \psi} \right) .$$

Utilisons la transformation de Carson et posons :

$$(8.7) \quad \mathcal{C}_1(p, \psi) \subset \theta_1(t, \psi) \quad ,$$

et

$$(8.8) \quad \mathcal{C}_2(p, \psi) \subset \theta_2(t, \psi) \quad .$$

Comme précédemment, le théorème de Poli conduit à l'équation à laquelle obéit la transformée $\mathcal{C}_2(p, \psi)$ de $\theta_2(t, \psi)$:

$$(8.9) \quad p \mathcal{C}_2 - \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\psi^{1/2} \frac{\partial \mathcal{C}_2}{\partial \psi} \right) = \frac{p}{Sc} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\psi^{(n+1)/2} \int_p^{\infty} \frac{\partial \mathcal{C}_1}{\partial \psi}(\lambda, \psi) c_n(\lambda - p) \frac{d\lambda}{\lambda} \right] ,$$

.../...

(1) On peut faire la même remarque qu'au chapitre 7 sur la condition imposée à la paroi à la fonction $\theta_2(t, \psi)$. Il faut alors remplacer, sur la figure 18, l'axe des u_e^2 par un axe de θ_p .

avec, pour conditions aux limites,

$$(8.10) \quad \begin{cases} \lim_{\psi \rightarrow 0} \mathcal{C}_2(p, \psi) = \mathcal{S}(p) \\ \lim_{\psi \rightarrow \infty} \mathcal{C}_2(p, \psi) = 0 \end{cases} ;$$

$\mathcal{S}(p)$ est l'image de :

$$\theta_p(t) = \theta_2(t, 0) \quad .$$

Effectuons les changements de variables :

$$(8.11) \quad s' = S c^{1/2} s = \frac{4}{3} S c^{1/2} p^{1/2} \psi^{3/4}$$

et

$$(8.12) \quad \mathcal{V}_2(p, s') = s'^{-1/3} \mathcal{C}_2(p, \psi) \quad .$$

Après avoir divisé par $p s'^{1/3}$ et changé le signe de toute l'équation, nous obtenons, si l'on désigne par $H_2(p, s')$ le second membre de l'équation (8.9),

$$(8.13) \quad \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial s'^2} + \frac{1}{s'} \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial s'} - \left(1 + \frac{1}{9 s'^2}\right) \mathcal{V}_2 = H_2(p, s') \quad .$$

Calculons $H_2(p, s')$ en posant :

$$(8.14) \quad \sigma = \left(\frac{\lambda}{p}\right)^{1/2} s' \quad .$$

Le second membre de l'équation (8.13) s'écrit, compte tenu de (8.11), (8.12) et (8.14),

$$(8.15) \quad H_2 = - p^{1/3} S c s'^{-2/3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{2n/3} (p S c)^{-n/3} \frac{\partial}{\partial s'} \left[s'^{2(n+1)/3} \int_p^{\infty} \lambda^{-1/3} \sigma^{-1/3} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\sigma^{1/3} \mathcal{V}_1(\lambda, \sigma) \right) c_n(\lambda - p) d\lambda \right] .$$

.../...

Remplaçons, dans (8.15), $\mathcal{V}_1(\lambda, \varsigma)$ par son expression tirée de la première approximation et exprimons-le avec les variables p , s' et λ :

$$(8.16) \quad H_2 = \frac{3^{1/2} \Gamma(2/3)}{2^{1/3} \pi} p^{1/3} s'^{-2/3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{2n/3} (p s_c)^{-n/3} \\ \frac{\partial}{\partial s'} \left[s'^{2(n+1)/3} \int_p^{\infty} \lambda^{-1/3} \mathcal{S}(\lambda) K_{2/3} \left(s' \frac{\lambda^{1/2}}{p^{1/2}} \right) c_n (\lambda - p) d\lambda \right] .$$

L'intégrale générale de l'équation (8.13) est de la forme :

$$(8.17) \quad \mathcal{V}_2(p, s') = B_2^-(p, s') I_{-1/3}(s') + B_2^+(p, s') I_{+1/3}(s')$$

Appliquons les conditions aux limites en tenant compte du comportement aux limites des fonctions de Bessel modifiées.

Nous obtenons :

$$(8.18) \quad B_2^-(p, s') = b_2^-(p) - \frac{\pi}{3^{1/2}} \int_0^{s'} s' H_2(p, s') I_{1/3}(s') ds' ,$$

$$(8.19) \quad B_2^+(p, s') = b_2^+(p) + \frac{\pi}{3^{1/2}} \int_0^{s'} s' H_2(p, s') I_{-1/3}(s') ds' ,$$

$$(8.20) \quad b_2^-(p) = 2^{-1/3} \cdot \Gamma(2/3) \cdot \mathcal{S}(p) ,$$

$$(8.21) \quad b_2^+(p) = - 2^{-1/3} \cdot \Gamma(2/3) \cdot \mathcal{S}(p) - \int_0^{\infty} s' H_2(p, s') K_{1/3}(s') ds' .$$

En portant (8.18), (8.19), (8.20) et (8.21) dans (8.17), nous obtenons la transformée de Carson de la solution de la deuxième approximation. Nous n'avons pu obtenir l'original de cette expression, mais, en prenant le développement limité à la paroi en $s'^{2/3}$, nous avons pu obtenir la densité de flux pariétale de la deuxième approximation.

En prenant le développement limité de $\mathcal{V}_2(p, s')$, la transformée de ce développement sera :

$$(8.22) \quad \mathcal{V}_2(p, s') = \mathcal{S}(p) - 2^{1/2} (3/4)^{2/3} s_c^{2/3} p^{-1/3} \chi_2(p) s'^{2/3} + o(\psi) ,$$

avec

$$(8.23) \quad \chi_2(p) \subset \frac{\varphi_{p2}(t)}{[\tau_{p2}(t)]^{1/2}} \quad .$$

En comparant les développements limités de (8.17) et de (8.22) en $s'^{2/3}$, il vient :

$$(8.24) \quad \chi_2(p) = - (Sc)^{-2/3} \frac{2^{1/2} 3^{1/3}}{\Gamma(1/3)} p^{1/3} b_2^+(p) \quad .$$

Explicitons l'intégrale de $b_2^+(p)$ donnée par l'équation (8.21) :

$$(8.25) \quad \mathcal{L} = \int_0^\infty s' H_2(p, s') K_{1/3}(s') ds' = - \frac{3^{1/2} \Gamma(2/3)}{2^{1/3} \pi} p^{1/3} s'^{-2/3} \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{3}{4}\right)^{2n/3}$$

$$(p Sc)^{-n/3} \int_0^\infty s'^{1/3} K_{1/3} \frac{\partial}{\partial s'} \left[s'^{2(n+1)/3} \int_p^\infty \lambda^{-1/3} \mathcal{J}_1(\lambda) K_{2/3}\left(s' \left(\frac{\lambda}{p}\right)^{1/2}\right) \cdot c_n(\lambda - p) d\lambda \right] ds' \quad .$$

Intégrons par parties $\int_0^\infty s'^{1/3} K_{1/3} \frac{\partial}{\partial s'} [\dots] ds'$, nous obtenons :

$$(8.26) \quad \mathcal{L} = \frac{3^{1/2} \Gamma(2/3) p^{1/3}}{2^{1/3} \pi} \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{3}{4}\right)^{2n/3} (p Sc)^{-n/3} \int_0^\infty s'^{(2n/3)+1} K_{2/3}(s')$$

$$\left[\int_p^\infty \lambda^{-1/3} \mathcal{J}_1(\lambda) K_{2/3}\left(s' \left(\frac{\lambda}{p}\right)^{1/2}\right) c_n(\lambda - p) d\lambda \right] ds' \quad .$$

Intervertissons l'ordre d'intégration, ce qui est possible car les intégrales sont convergentes :

$$(8.27) \quad \mathcal{L} = \frac{3^{1/2} \Gamma(2/3)}{2^{1/3} \pi} p^{1/3} \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{3}{4}\right)^{2n/3} (p Sc)^{-n/3} \int_p^\infty \lambda^{1/3} \mathcal{J}_1(\lambda) c_n(\lambda - p)$$

$$\left[\int_0^\infty s'^{(2n/3)+1} K_{2/3}\left(s' \left(\frac{\lambda}{p}\right)^{1/2}\right) K_{2/3}(s') ds' \right] d\lambda \quad .$$

La dernière intégrale est de la forme :

$$(8.28) \quad I(\alpha, \beta) = \int_0^\infty s'^\lambda K_\mu(\alpha, s') K_\nu(\beta, s') ds' ,$$

qui existe lorsque $\mu + \nu < \lambda + 1$; elle s'exprime à l'aide d'une fonction hypergéométrique :

$$(8.29) \quad I(\alpha, \beta) = \frac{G(\lambda, \mu, \nu)}{\alpha^{1+\lambda-\nu} \beta^\nu} {}_2F_1\left(\frac{1+\lambda-\mu-\nu}{2}, \frac{1+\lambda+\mu-\nu}{2}, 1+\lambda, 1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right),$$

avec

$$(8.30) \quad G(\lambda, \mu, \nu) = \frac{2^{\lambda-2}}{\Gamma(1+\lambda)} \Gamma\left(\frac{1+\lambda-\mu-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\lambda-\mu+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\lambda+\mu+\nu}{2}\right) \\ \cdot \Gamma\left(\frac{1+\lambda+\mu-\nu}{2}\right) .$$

Ici,

$$(8.31) \quad \lambda = \frac{2n}{3} + 1, \quad \mu = \nu = \frac{2}{3}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{\lambda}{p}}, \quad \beta = 1 ,$$

d'où

$$(8.32) \quad \mathcal{L} = \frac{3^{1/2} \Gamma(2/3)}{2^{1/3} \pi} p \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{2n/3} s_c^{-n/3} \frac{\Gamma(\frac{n}{3} + \frac{1}{3}) \Gamma^2(\frac{n}{3} + 1) \Gamma(\frac{n}{3} + \frac{5}{3})}{\Gamma(\frac{2n}{3} + 2)} \\ \int_p^\infty \lambda^{-(n/3)-1} \delta'(\lambda) c_n(\lambda - p) {}_2F_1\left(\frac{n}{3} + \frac{1}{3}, \frac{n}{3} + 1, \frac{2n}{3} + 2, 1 - \frac{p}{\lambda}\right) d\lambda ;$$

en portant (8.32) dans (8.24), nous obtenons :

$$(8.33) \quad \chi_2(p) = \frac{2^{1/3} 3^{1/3} \Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} p^{1/3} \left[\delta(p) + \frac{3^{1/2}}{2\pi} p \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{2n/3} s_c^{-n/3} \frac{\Gamma(\frac{n}{3} + \frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{2n}{3} + 2)} \Gamma^2\left(\frac{n}{3} + 1\right) \Gamma\left(\frac{n}{3} + \frac{5}{3}\right) \int_p^\infty \lambda^{-(n/3)-1} \delta'(\lambda) c_n(\lambda - p) {}_2F_1\left(\frac{n}{3} + \frac{1}{3}, \frac{n}{3} + 1, \frac{2n}{3} + 2, \frac{\lambda - p}{\lambda}\right) d\lambda \right] .$$

Cette expression peut se mettre sous la forme :

$$(8.34) \quad \chi_2(p) = k \frac{1}{p} p^{1/3} \left[p \mathcal{S}(p) + p \Delta(p) \right],$$

k étant une constante et :

$$(8.35) \quad \Delta(p) \subset \Theta(t),$$

Θ étant une fonction inconnue pour l'instant.

Appliquons le théorème de Borel (6.13) pour trouver l'original du deuxième membre de l'équation (8.34).

Posons dans (6.13) :

$$(8.36) \quad F(p) = p^{1/3}, \quad f(t) = \frac{t^{-1/3}}{\Gamma(2/3)}$$

$$(8.37) \quad G(p) = \left[\mathcal{S}(p) + \Delta(p) \right], \quad g(t) = \left[\theta_2(t, \theta) + \Theta \right],$$

d'où

$$(8.38) \quad \varphi_{p2}(t) = \frac{2^{1/6} 3^{1/3}}{\Gamma(1/3)} s c^{-2/3} \left[\tau_{p2}(t) \right]^{1/2} \int_0^t (t - t')^{-1/3} d(\theta_p + \Theta)$$

Cherchons l'original $\Theta(t)$ de $\Delta(p)$ donné par :

$$(8.39) \quad \Delta(p) = \frac{3^{1/2}}{2\pi} p \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{2n/3} s c^{-n/3} \frac{\Gamma(\frac{n}{3} + \frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{2n}{3} + 2)} \Gamma^2\left(\frac{n}{3} + 1\right) \Gamma\left(\frac{n}{3} + \frac{5}{3}\right)$$

$$\int_P^{\infty} \lambda^{-(n/3)-1} \mathcal{S}(\lambda) c_n(\lambda - p) {}_2F_1\left(\frac{n}{3} + \frac{1}{3}, \frac{n}{3} + 1, \frac{2n}{3} + 2, \frac{\lambda - p}{\lambda}\right) d\lambda.$$

Remplaçons la fonction ${}_2F_1$ par son développement en série :

$$(8.40) \quad {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + r)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\beta + r)}{\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma + r)} \frac{x^r}{\Gamma(1 + r)}$$

et intervertissons, dans (8.39), le signe somme $\int_P^{\infty}$ et le signe somme de la série $\sum_{r=0}^{\infty}$ introduit par le développement en série de la fonction ${}_2F_1$:

$$(8.41) \quad \Delta(p) = \frac{3^{1/2} p}{2 \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{2n/3} s c^{-n/3} \Gamma\left(\frac{n}{3} + 1\right) \Gamma\left(\frac{n}{3} + \frac{5}{3}\right)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{3} + \frac{1}{3} + r\right) \Gamma\left(\frac{n}{3} + 1 + r\right)}{\Gamma\left(\frac{2n}{3} + 2 + r\right) \Gamma(1 + r)} \int_p^{\infty} \lambda^{-(n/3)-1} \mathcal{J}(\lambda) c_n(\lambda - p) \left(\frac{\lambda - p}{\lambda}\right)^r d\lambda .$$

Nous obtiendrons l'original de cette expression à l'aide du théorème de POLI [28].

Posons dans (7.22) :

$$(8.42) \quad g(\lambda - p) = c_n(\lambda - p)(\lambda - p)^r ,$$

$$(8.43) \quad F(\lambda) = \lambda^{-(n/3)-r} \cdot \mathcal{J}(\lambda) .$$

Or :

$$(8.44) \quad \frac{1}{p} (p^{-(n/3)-r})_p \mathcal{J}(\lambda) \subset \int_0^t \frac{(t - t')^{(n/3)+r}}{\Gamma\left(\frac{n}{3} + r + 1\right)} d[\theta_p(t')] ,$$

d'où

$$(8.45) \quad f(t) = \int_0^t \frac{(t - t')^{(n/3)+r}}{\Gamma\left(\frac{n}{3} + r + 1\right)} d[\theta_p(t')] .$$

La fonction $g(t)$ est obtenue à l'aide de (7.21), soit :

$$(8.46) \quad c_n(t) t^r \supset (-1)^n p \frac{d^r y_n}{dp^r} ,$$

d'où :

$$(8.47) \quad G(t) = (-1)^r t \frac{d^r y_n}{dt^r} .$$

La transformée complète est donc :

$$(-1)^r \frac{d^r y_n(t)}{dt^r} \int_0^t \frac{(t - t')^{(n/3)+r}}{\Gamma\left(\frac{n}{3} + r + 1\right)} d\theta_p ,$$

d'où

$$(8.48) \quad \Theta = \frac{3^{1/2}}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{2n/3} s_c^{-n/3} \Gamma\left(\frac{n}{3} + 1\right) \Gamma\left(\frac{n}{3} + \frac{5}{3}\right) \\ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{3} + \frac{1}{3} + r\right)}{\Gamma\left(\frac{2n}{3} + 2 + r\right)} \frac{(-1)^r}{\Gamma(1+r)} \frac{d^r \theta_p(t)}{dt^r} \int_0^t (t-t')^{(n/3)+r} d[\theta(t')] \quad .$$

L'équation (8.48), jointe à l'équation (6.32) et à la deuxième approximation dynamique (8.38), permet de calculer la différence entre les deux premières approximations.

La densité de flux massique, dans le cas de la deuxième approximation, est obtenue par la formule suivante, tirée de (8.38),

$$\varphi_{p2} = \varphi_{p1} \cdot f(\tau_{p2}, \tau_{p1}) \left(1 + \frac{\Theta}{\theta_p}\right) \quad .$$

La fonction f est obtenue en comparant (8.38) avec (6.45).

8.2. Calcul de la deuxième approximation dans des cas particuliers.-

Nous allons calculer cette deuxième approximation sur une plaque plane.

8.2.1. Cas d'une concentration constante.-

Intégrons par parties l'intégrale de l'équation (8.48) et sortons θ_p du signe somme. L'intégrale se réduit à :

$$(8.49) \quad \int_0^t (t-t')^{(n/3)+r} \frac{d\theta_p}{dt'} dt' = \theta_p t^{(n/3)+r} \quad ,$$

d'où

$$(8.50) \quad \frac{\Theta}{\theta_p} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{2n/3} s_c^{-n/3} \Gamma\left(\frac{n}{3} + 1\right) \Gamma\left(\frac{n}{3} + \frac{5}{3}\right) \\ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{3} + \frac{1}{3} + r\right)}{\Gamma\left(\frac{2n}{3} + 2 + r\right)} \frac{(-1)^r}{\Gamma(1+r)} \frac{d^r [\theta_p(t)]}{dt^r} t^{(n/3)+r} \quad ,$$

Pour une plaque plane, nous avons :

$$(8.51) \quad \tau_p = k' t^{-2/3} ,$$

$$(8.52) \quad u_e = Cte ;$$

d'après (7.16),

$$(8.53) \quad \gamma_n = - \frac{b_{n+2}}{2 d_1^2} - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n-1} \gamma_p \gamma_{n-p} ;$$

en tenant compte de (7.14) et (7.11), il vient, en posant :

$$(8.54) \quad n = 3 i ,$$

$$(8.55) \quad \frac{b_{3i+2}}{2 d_1^2} = \frac{- 2^{i+1}}{3^i i! 4} t^{-i} \prod_{p=1}^i \frac{(- \frac{2}{3} - p + 1)}{3 p + 2} ,$$

d'où

$$(8.56) \quad \gamma_{3i} = \frac{2^{i-1} t^{-i}}{3^i i!} \prod_{p=1}^i \frac{(- \frac{2}{3} - p + 1)}{(3 p + 2)} - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{3i-1} \gamma_{3p} \gamma_{3i-3p} .$$

Remarquons que, d'après la définition des γ_n , toutes les valeurs de n qui ne sont pas multiples de 3 entraînent un γ_n nul.

Remarquons aussi que les produits $\gamma_{3p} \gamma_{3i-3p}$ sont en t^{-i} .

Posons :

$$(8.57) \quad \gamma_{3i} = \gamma_i = \bar{\gamma}_i t^{-i} ,$$

avec

$$(8.58) \quad \bar{\gamma}_i = \left(\frac{2}{3}\right)^i \frac{1}{2} \frac{1}{i!} \prod_{p=1}^i \frac{(- \frac{2}{3} - p + 1)}{(3 p + 2)} - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{i-1} \bar{\gamma}_p \bar{\gamma}_{i-p} ;$$

nous obtenons :

$$(8.59) \quad \frac{d^r \gamma_n}{dt^r} = t^{-r-i} \bar{\gamma}_i \prod_{k=1}^r (1 - i - k) .$$

Portons (6.61) dans (4.2); on voit que Θ/θ_p est indépendant de t , pour une plaque plane à concentration constante à la paroi. Les trois premiers termes calculés sont :

$$(8.60) \quad \frac{\Theta}{\theta_p} = - \frac{1,1 \cdot 10^{-2}}{Sc} + \frac{1,04 \cdot 10^{-3}}{Sc^2} + \frac{1,4 \cdot 10^{-5}}{Sc^3} \quad .$$

Connaissant l'écart entre les flux de la deuxième et de la première approximation, nous pouvons rectifier chaque courbe de la première approximation en modifiant le coefficient de z (6.39) pour que la pente à la paroi soit celle de la deuxième approximation. Nous prenons pour variable η la variable η_2 de la deuxième approximation dynamique. Celle-ci est obtenue dans le chapitre 7.

Pour un nombre de Schmidt égal à 0,6, nous obtenons :

$$(8.61) \quad z = 0,555 Sc \left(\frac{\psi}{\sqrt{2x}} \right)^{3/2} \quad .$$

La courbe obtenue coïncide avec celle de Pohlausen.

8.2.2. Cas où $\theta_p(t) = \theta^* x^{\ell}$.

La relation (8.48) nous donne :

$$(8.62) \quad \Theta = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{2n/3} Sc^{-n/3} \Gamma\left(\frac{n}{3} + 1\right) \Gamma\left(\frac{n}{3} + \frac{5}{3}\right)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{\Gamma\left(\frac{n}{3} + r + 1\right)}{\Gamma(r+1) \Gamma\left(\frac{2n}{3} + r + 2\right)} \gamma_n^r \int_0^t (t - t')^{(n/3)+r} d\theta \quad .$$

Dérivons $\theta(t)$ par rapport à t et portons sa valeur dans l'intégrale; celle-ci devient, en posant :

$$(8.63) \quad u = \frac{t'}{t} \quad ,$$

$$(8.64) \quad \frac{4\theta^*}{3} t^{(n/3)+r+(4\ell/3)} \int_0^1 (1-u)^{(n/3)+r} u^{(4\ell/3)-1} du \quad ,$$

ou :

$$(8.65) \quad \frac{4 \theta^*}{3} t^{(n/3)+r+(4l/3)} \frac{\Gamma(\frac{n}{3} + r + 1) \Gamma(\frac{4l}{3})}{\Gamma(\frac{n}{3} + r + 1 + \frac{4l}{3})} ,$$

d'où, après simplification et tenant compte de (8.62),

$$(8.66) \quad \frac{\Theta}{\theta_p} = \frac{4 l}{\sqrt{3} 2 \pi} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 Sc^{-1} \right]^i \Gamma(i+1) \Gamma(i + \frac{5}{3}) \bar{y}_i$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(i+r+\frac{1}{3})}{\Gamma(r+1) \Gamma(2i+r+2)} \prod_{k=1}^r (i-1+k) \frac{\Gamma(i+r+1)}{(i+r+\frac{4l}{3} \dots (\frac{4l}{3}))} ;$$

ceci nous donne comme développement, en fonction du nombre de Schmidt,

$$(8.67) \quad \left\{ \begin{array}{l} l = 0,25 , 1 + \frac{\Theta}{\theta_p} = 1 - \frac{0,707}{Sc} 10^{-2} + \frac{0,12}{Sc^2} 10^{-2} - \frac{0,13}{Sc^3} 10^{-3} \\ l = 0,5 , 1 + \frac{\Theta}{\theta_p} = 1 - \frac{0,53}{Sc} 10^{-2} + \frac{0,27}{Sc^2} 10^{-3} - \frac{0,88}{Sc^3} 10^{-5} \\ l = 0,75 , 1 + \frac{\Theta}{\theta_p} = 1 - \frac{0,427}{Sc} 10^{-2} + \frac{0,1}{Sc^2} 10^{-3} + \frac{0,13}{Sc^3} 10^{-5} \\ l = 1 , 1 + \frac{\Theta}{\theta_p} = 1 - \frac{0,35}{Sc} 10^{-2} + \frac{0,4}{Sc^2} 10^{-4} + \frac{0,28}{Sc^3} 10^{-6} \end{array} \right.$$

D'où, en tenant compte de la deuxième approximation dynamique et de cette erreur, nous obtenons le flux ψ_{p2} et les courbes rectifiées sur les figures 20, 21, 22 et 23.

8.2.3. Calcul de la deuxième approximation dans le cas d'une plaque plane avec conditions de Fourier.

L'équation (8.48) donne :

$$(8.68) \quad \psi_{p2} = \frac{2^{1/6} 3^{1/3}}{r (1/3)} Sc^{-2/3} \left[\tau_{p2}(t) \right]^{1/2} \int_0^t (t - t')^{-1/3} d \left[\theta_p \left(1 + \frac{\Theta}{\theta_p} \right) \right] .$$

Nous allons calculer l'erreur commise en prenant la deuxième approximation, c'est-à-dire que nous calculons Θ/θ_p en fonction du nombre de Sc et de t.

L'équation (6.58) nous donne :

$$(8.69) \quad \theta_p = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j c_j t^{2j/3} ,$$

$$(8.70) \quad \frac{d\theta_p}{dt} = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j c_j \frac{2j}{3} t^{(2j/3)-1} .$$

Portons cette valeur de $d\theta/dt$ dans (8.48); pour une plaque plane, nous avons vu que les termes γ_n qui ne sont pas multiples de 3 sont nuls; avec $n = 3i$ nous obtenons :

$$(8.71) \quad \theta = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{2i} s c^{-i} \Gamma(i+1) \Gamma(i + \frac{5}{3})$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{\Gamma(i+r+\frac{1}{3})}{\Gamma(1+r) \Gamma(2i+r+2)} \frac{d^r \gamma_n(t)}{dt^2} \int_0^t (t-t')^{i+r} \frac{d\theta_p(t')}{dt'} dt' .$$

Calcul de l'intégrale : l'intégrale s'écrit avec (6.71);

$$(8.72) \quad \mathcal{M} = \int_0^t (t-t')^{i+r} \sum_{j=1}^{\infty} c_j \frac{2j}{3} t'^{(2j/3)-1} dt' .$$

Intervertissons le signe somme et le signe intégral; nous obtenons :

$$(8.73) \quad \mathcal{M} = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \frac{2j}{3} \int_0^t (t-t')^{i+r} t'^{(2j/3)-1} dt' .$$

Posons :

$$\xi = \frac{t'}{t} .$$

Puisque :

$$(8.74) \quad \int_0^1 (1-x)^{q-1} x^{p-1} dx = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} ,$$

l'intégrale donne, après intégration et simplification,

$$(8.75) \quad \mathcal{M} = t^{i+r} \Gamma(i+r+1) \sum_{j=1}^{\infty} c_j \frac{2j}{3} \frac{t^{2j/3}}{(i+r+\frac{2j}{3})(i+r-1+\frac{2j}{3}) \dots (\frac{2j}{3})} .$$

Portons les expressions (8.75) et (8.59) dans (8.71); nous obtenons :

$$(8.76) \quad \Theta = \frac{1}{\pi \sqrt{3} \Gamma(\frac{2}{3})} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 Sc^{-1} \right]^i \Gamma(i+1) \Gamma(i+\frac{5}{3}) \bar{y}_i$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{\Gamma(i+r+\frac{1}{3})}{\Gamma(r+1) \Gamma(2i+r+2)} \left[\prod_{k=1}^r (1-i-k) \right] \Gamma(i+r+1)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} C_j \frac{2j}{3} \frac{t^{2j/3}}{(i+r+\frac{2j}{3})(i+r-1+\frac{2j}{3}) \dots (\frac{2j}{3})} \cdot$$

Nous avons calculé Θ/θ_p pour différents nombres de Schmidt et pour différentes valeurs de t . Le résultat numérique nous montre que Θ/θ_p est pratiquement indépendant de t et de θ . Nous obtenons, sous forme de série numérique, le résultat :

$$(8.77) \quad 1 + \frac{\Theta}{\theta_p} = 1 - \frac{6 \cdot 10^{-3}}{Sc} + \frac{10^{-4}}{Sc^2} - \frac{5 \cdot 10^{-6}}{Sc^3} \dots$$

Comme nous l'avons déjà fait, la connaissance de cette deuxième approximation permet d'ajuster le profil des concentrations (fig. 24).

On voit que le nombre de Schmidt a peu d'influence sur la deuxième approximation. Il faut qu'il soit inférieur à 0,2 pour introduire une correction de 3% par rapport à la première approximation.

8.3. Conclusion de cette analyse théorique.-

Nous venons de présenter une méthode d'intégration de la couche limite laminaire dans un fluide à propriétés physiques constantes. Cette méthode consiste en un processus itératif.

La première approximation a été résolue entièrement et les profils de concentration réduite correspondant à différentes conditions aux limites ont été présentés. Dans le cas particulier de la plaque plane, où l'on peut comparer avec les intégrations exactes (profils en similitude), on constate que l'erreur est faible et dépend du nombre de Schmidt.

Lorsque le gradient de pression dans la couche limite n'est plus négligeable, on améliore beaucoup les résultats en résolvant les équations de la deuxième approximation. Cette résolution introduit une correction fonction du nombre de Schmidt. Dans le cas particulier de la plaque plane (profils en similitude), on retrouve, à moins de 1%, les profils de vitesse et de concentration exacts. L'expression de la densité de flux de masse à la paroi, lorsqu'on a une catalyse au premier ordre, a été déterminée, dans le cadre de la deuxième approximation, en fonction des nombres de Schmidt et de Damköhler.

CHAPITRE 9

Résolution par une méthode analogique

Après cette partie théorique, nous présentons une autre méthode pour résoudre ce problème. L'analogie thermique permettra de simuler n'importe quelle réaction catalytique du premier ordre et de vérifier les calculs précédents.

9.1. Principe de l'analogie thermique.-

Le phénomène de la diffusion dans une couche limite laminaire à propriétés physiques constantes se traduit par l'équation (3.13) adimensionnelle :

$$(9.1) \quad u \frac{\partial a}{\partial x} + v \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{1}{Sc} \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} \quad ;$$

on aura, de même, pour l'effet catalytique de la paroi la condition :

$$(9.2) \quad y = 0 \quad , \quad \frac{1}{Sc} \frac{\partial a}{\partial y} = Da \cdot a \quad .$$

Nous obtiendrons une équation différentielle identique dans sa forme et dans ses conditions aux limites en plaçant, dans un courant d'air laminaire (fig. 27), une plaque plane P maintenue à une température uniforme T_a et recouverte d'une feuille isolante d'épaisseur ℓ et de conductivité thermique λ_i (fig. 28). L'équation de la couche limite thermique, dans ce cas, s'écrit :

$$(9.3) \quad \rho u \frac{\partial}{\partial x} (c_p T) + \rho v \frac{\partial}{\partial y} (c_p T) = u \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad ;$$

les variables employées ont une dimension.

Dans le deuxième membre, $u(dp/dx)$ est petit devant $\partial/\partial y [\lambda (\partial T/\partial y)]$, puisque le gradient de pression est pratiquement nul. De même, $\mu (\partial u/\partial y)^2$, terme dû

au frottement visqueux, est négligeable devant $(\partial/\partial y) [\lambda (\partial T/\partial y)]$ puisque les vitesses sont faibles.

En supposant que les propriétés physiques du fluide sont constantes, l'équation (9.3) devient :

$$(9.4) \quad u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\mu c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} .$$

Choisissons, comme condition à la paroi, une condition du type de Fourier :

$$(9.5) \quad - \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_p = \lambda_i \frac{T_a - T(x, 0)}{l} ;$$

si nous prenons les variables sans dimensions suivantes :

$$(9.6) \quad u^* = \frac{u}{u_\infty} , \quad v^* = \frac{v}{v_\infty} , \quad x^* = \frac{x u}{\sqrt{\nu}} , \quad y^* = \frac{y u}{\sqrt{\nu}} , \quad T^* = \frac{T - T_0}{T_\infty - T_0} ,$$

l'équation précédente devient :

$$(9.7) \quad u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} ,$$

$$(9.8) \quad \frac{1}{Pr} \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = Da_T \cdot T^* ,$$

avec :

$$(9.10) \quad \boxed{Da_T = \frac{\lambda_i}{\rho c_p l u_\infty}} .$$

En comparant les équations (9.7) et (9.1), et leurs conditions à la paroi (9.8) et (9.2), nous voyons qu'elles se déduisent respectivement l'une de l'autre en remplaçant :

$$a \quad \text{par} \quad \frac{T_a - T(x, y)}{T_a - T_\infty} = T^*$$

$$Sc \quad \text{par} \quad Pr$$

$$Da \quad \text{par} \quad Da_T = \frac{\lambda_i}{\rho c_p l u_\infty} .$$

A la variable Z' définie par l'équation (6.55) correspond la nouvelle variable Z'_T définie par :

$$(9.11) \quad Z'_T = \frac{1}{0,339} Da_T Pr^{2/3} \sqrt{x^*} ,$$

où le nombre de Schmidt a été remplacé par le nombre de Prandtl.

La correspondance entre a_p et Z' sera identique à celle de T_p^* et Z'_T , puisque ces variables réduites obéissent à la même équation intégrale.

9.2. Méthode expérimentale.-

La soufflerie est à circuit fermé; elle permet d'atteindre des vitesses inférieures à 7 m/s. Elle comprend la veine, la chambre de tranquillisation, le circuit de retour et la pompe centrifuge. Ces différentes parties sont visibles sur la photographie de la figure 25.

Après plusieurs modifications de l'appareil, nous avons pu réaliser des conditions d'écoulement laminaire et un gradient de pression nul.

Le niveau de turbulence de l'écoulement était initialement de 3% dans la veine; il était dû à la pompe, aux coudes et à la forme de la veine. Pour abaisser le niveau de turbulence, nous avons agi sur trois facteurs essentiels :

a) Une grande chambre de tranquillisation, pourvue de filtres en tissu de nylon très fin, a été placée en amont de la veine (fig. 26 et 27).

b) La forme arrondie du bord d'attaque de la feuille isolante a été très soigneusement étudiée pour éviter tout décollement au bord d'attaque.

c) La disparition des couches limites précédant la plaque est assurée par une aspiration au bord d'attaque de la plaque plane (fig. 26).

Pour réaliser un gradient de pression nul, nous avons donné à la veine une légère divergence à l'aide d'une plaque inclinable placée en face de la plaque chauffante.

Nous avons déterminé expérimentalement la position de cette plaque qui entraîne le plus faible gradient de pression; son influence sur les profils de vitesse était négligeable, puisque ceux-ci se confondent pratiquement avec les profils que donne la théorie dans le cas d'un gradient de pression nul, comme on le verra ci-dessous.

Dans ces conditions expérimentales, on a mesuré, à l'aide d'un fil chaud, le niveau de turbulence et les profils de vitesse.

En tout point de la veine, le niveau de turbulence était inférieur à 0,1%. Après étalonnage à l'aide d'un micromanomètre "Chattock et Fry", le fil chaud a permis d'avoir les profils des vitesses de la couche limite. Ces profils correspondent bien aux profils théoriques de Blasius. La couche limite est donc bien laminaire et à gradient de pression nul.

La plaque chauffante (fig. 28) est un bloc de laiton percé de six canalisations longitudinales et de deux transversales dans lesquelles circule de la vapeur d'eau sous une pression de deux bars environ. L'injection de la vapeur se fait dans la partie avant de la plaque; le condensat sort par deux tubes C et C', situés à l'arrière de la plaque, et retourne à la chaudière.

La vapeur produite par la chaudière est maintenue à température constante par régulation automatique.

Les mesures de température de la plaque chauffante sont faites à l'aide de six thermocouples fer-constantan, situés à un millimètre de la face de la paroi chauffante qui est en contact avec la feuille isolante. Ces prises de température permettent de contrôler la stabilité du régime thermique et les variations de la température le long de la plaque. Les températures varient dans le temps d'un quart de degré au maximum, et la variation de température le long de la plaque chauffante est de trois degrés environ, pour une température moyenne de 135°C. Nous avons tenu compte de cette variation dans les calculs des rapports $(T_a - T_p)/(T_a - T_\infty)$ (cf. § 9.3) en prenant, pour abscisse x, une température T_a égale à celle de la plaque chauffante à cette abscisse.

9.3. Exploration thermique de la couche limite.

La température dans la couche limite est mesurée à l'aide d'un thermocouple utilisant des fils de manganine et de constantan de 0,05 mm, fixés respec-

tivement aux extrémités d'une broche constituée par deux gros fils de manganine et de constantan (fig. 29).

Comme les fils du thermocouple et les fils de la broche provenaient de lingots différents, il a fallu choisir ces fils afin que les différences de potentiel entre fils de même appellation soient négligeables pour un écart de température de 50°C.

La commande des déplacements verticaux de la broche est faite à distance par un dispositif pneumatique.

La sonde est reliée à une membrane métallique qui se déplace sous l'action d'une différence de pression ΔP (fig. 30).

A une valeur de ΔP de l'ordre de 760 mm de mercure correspond une flèche de la membrane de l'ordre du millimètre, soit, en lisant le demi-millimètre de déplacement du mercure, une précision de l'ordre du micron sur le déplacement de la membrane.

Au cours de premières mesures, nous avons constaté que le thermocouple d'exploration placé au contact de la paroi ne donnait pas la température réelle de la paroi : la température mesurée était systématiquement inférieure de dix degrés à celle que la théorie permettait de prévoir.

Cette erreur provenait d'un mauvais contact thermique, d'une part, entre la feuille isolante et la plaque chauffante et, d'autre part, de l'épaisseur de la soudure et de son mauvais contact avec la feuille isolante.

On ne pouvait pas introduire un thermocouple à l'intérieur de cette feuille, car le gradient de température y était de l'ordre de 100° pour deux millimètres d'épaisseur.

Pour remédier au premier défaut, nous avons déposé une couche de peinture à l'argent sur la face de la feuille isolante au contact avec la plaque chauffante.

Pour mesurer la température de paroi au contact du fluide, nous avons employé la méthode THUREAU [30],[31] que nous rappelons brièvement.

Le sulfure mixte de zinc, de cadmium, de manganèse et d'or, excité par un rayonnement ultra-violet, émet un spectre de luminescence dont l'intensité dépend de la température.

Le rapport des intensités de deux rayonnements de longueurs d'onde λ_1 et λ_2 est pratiquement indépendant de l'intensité de la source ultra-violette et n'est fonction que de la température de la substance (fig. 31). Le rapport des

intensités lumineuses I_{λ_1} et I_{λ_2} mesurées avec une même puissance de la lampe, permettra, après étalonnage, de déduire la température de la paroi.

La précision de cette méthode est de $\pm 1^\circ$ en valeur absolue, en prenant pour chaque point la moyenne d'une vingtaine de mesures.

L'exploration de la couche limite thermique a donné les profils de températures portés sur la figure 8.

Dans le tableau ci-dessous, nous avons relevé, pour sept abscisses différentes, les moyennes des températures T_a , T_p et T mesurées au cours d'une vingtaine d'essais.

De la valeur de $T_a - T_p / T_a - T_\infty$, nous déduisons Z_T à l'aide de la courbe de la figure 7, puis le rapport $Z_T / \sqrt{x}$. Nous constatons que ce rapport est constant à $\pm 3\%$, ce qui correspond à la précision que permettaient d'espérer nos mesures.

x	T_o	T_p	T	$\frac{T_a - T_p}{T_a - T_\infty}$	Z	$\frac{Z}{\sqrt{x}}$
2,5 mm	133	65	32	0,674	0,66	0,416
7 mm	133	78	32	0,545	1,05	0,396
12 mm	133	85	32	0,475	1,35	0,390
22 mm	134	94	32,5	0,394	1,85	0,394
53 mm	135	105	32,5	0,293	2,80	0,385
73 mm	135	107	33	0,275	3,10	0,363
94 mm	135	110	33	0,245	3,65	0,377

En comparant entre elles les différentes valeurs de $Z_T / \sqrt{x}$ nous remarquons une légère décroissance en fonction de x.

Cette anomalie peut s'interpréter comme le résultat de la présence de l'arrondi au bord d'attaque qui est nécessaire pour empêcher la production de tourbillons. Ce profil arrondi ($R = 2$ mm) empêche la réalisation immédiate des conditions dynamiques et thermiques nécessaires à l'intégration des équations :

- d'une part, l'origine des abscisses de la couche limite est mal connue et la courbe du bord d'attaque entraîne un gradient de pression local;

- d'autre part, puisque l'épaisseur de la feuille isolante croît dans la partie arrondie, la température de paroi est plus forte que celle d'une feuille

Cette augmentation de température entraîne une augmentation de $Z_T/\sqrt{x}$, ce qui est effectivement constaté.

En tenant compte des remarques précédentes, nous éliminons la première valeur voisine du bord d'attaque, et nous prenons comme constante la valeur moyenne des six autres, soit 38,4 en $\text{mm}^{-1/2}$.

La valeur théorique de $Z_T/\sqrt{x}$, calculée par l'équation (6.55), à une température moyenne de la couche limite de 60°C , est $Z_T/\sqrt{x} = 39,4 \text{ mm}^{-1/2}$; la différence est donc de 3% entre les valeurs théorique et expérimentale. Un calcul d'erreurs montre que, si l'erreur sur T_p est de 1° et si $T_a - T_\infty \simeq 50^\circ$, l'erreur sur $(T_a - T_p)/(T_a - T_\infty)$ est de l'ordre de 0,01. Sur la courbe de la figure 7, on voit qu'une variation de $(T_a - T_p)/(T_a - T_\infty)$ de 0,01 entraîne une variation de 0,04 sur une valeur de Z proche de l'unité : soit $(\Delta Z_T)/Z_T = 4\%$. Remarquons que la précision diminue quand x augmente.

Dans le calcul de la valeur de l'expression théorique de $Z_T/\sqrt{x}$, intervient la conductibilité thermique de la feuille isolante. Celle-ci a été mesurée au laboratoire d'essais du Conservatoire National des Arts et Métiers :

$\lambda_I = 0,108 \text{ joules/s.m.}^\circ\text{C}$ à $\pm 4\%$ près. On voit que les erreurs expérimentales (4%) dépassent de beaucoup l'erreur systématique due à la première approximation (2%).

9.4. Autres applications de l'analogie thermique.-

Nous avons également appliqué l'analogie thermique à l'étude de deux sortes de discontinuité : dans le premier cas, la plaque devient catalytique au delà d'une certaine abscisse L ; dans le second, la plaque n'est plus catalytique au delà d'une certaine abscisse L . Nous allons examiner successivement ces deux cas.

L'analogie de la plaque non catalytique est une plaque adiabatique (flux de chaleur nul). Dans le premier cas, il suffit de placer une plaque à la température de l'écoulement devant la plaque chauffante (fig. 32 et 33). Les bords en contact sont effilés pour éviter les pertes de chaleur longitudinales. La méthode de mesure est semblable à celle du paragraphe 9.3. Les figures 13 et 14 donnent les résultats obtenus sur la paroi et dans la couche limite ainsi que la courbe théorique qui correspond à cette discontinuité.

Dans le second cas, nous avons obtenu un flux de chaleur nul à la paroi, en faisant le vide sous la face interne d'une plaque mince de plexiglas (fig. 34).

Des thermocouples traversent la paroi et affleurent la surface. Ils donnent la distribution de la température pariétale sur la plaque adiabatique.

Sur les figures 10 et 11 nous avons porté la température réduite en fonction de l'abscisse. L'ensemble de ces résultats expérimentaux permet de vérifier les calculs théoriques précédemment effectués. Cette analogie thermique présente d'autres intérêts :

a) Si l'on fait varier l'épaisseur et la nature de la paroi isolante, on peut simuler n'importe quelle vitesse de réaction catalytique sur une paroi.

b) Les distributions du flux de masse à la paroi ne dépendent que du produit du nombre de Damköhler par le nombre de Schmidt élevé à la puissance deux tiers; ainsi, il n'est pas nécessaire d'avoir l'égalité entre le nombre de Schmidt et le nombre de Prandtl pour résoudre analogiquement à la paroi un problème de catalyse : il suffit que $Da \cdot Sc^{2/3}$ soit égal à $Da_T \cdot Pr^{2/3}$.

c) L'analogie thermique est tridimensionnelle; elle permet donc de trouver les profils de concentration, quelles que soient la forme du corps et la géométrie du dépôt catalytique. C'est ainsi que l'on peut simuler, par exemple, l'influence d'un hublot sur la paroi d'un engin.

9.5. Conclusion.-

Nous venons de voir qu'un problème de catalyse à la paroi peut être résolu théoriquement ou analogiquement, si l'on connaît le nombre de Schmidt, qui caractérise le mouvement par diffusion dans la couche limite, et le nombre de Damköhler catalytique, qui caractérise la production ou la disparition des constituants à la paroi. Ce nombre de Damköhler n'étant pas connu, il est nécessaire de le déterminer expérimentalement. Nous allons voir, dans le chapitre suivant, comment on peut effectuer cette détermination par des mesures de concentrations dans la couche limite.

CHAPITRE 10

Mesure d'une vitesse de réaction catalytique par la détermination des profils de concentration

Il existe peu d'expériences sur les écoulements de gaz avec réactions chimiques sur une paroi catalytique. Celles que nous citons [32], [33] utilisent des méthodes de mesure de flux de chaleur, et non de concentration.

Notre étude expérimentale a consisté à étudier la recombinaison catalytique sur une plaque plane de l'azote atomique :



Nous allons décrire successivement l'appareillage utilisé pour obtenir un écoulement d'azote à basse pression partiellement dissocié, et les dispositifs de mesure de concentration en azote atomique. Nous verrons ensuite que les résultats obtenus par trois méthodes différentes concordent entre eux et vérifient la théorie précédente.

10.1. Réalisation d'un jet de plasma à basse pression.-

10.1.1. Soufflerie.-

Les mesures ont été effectuées dans la soufflerie SR 2 du laboratoire d'Aérodynamique du C.N.R.S., qui est décrite dans la thèse de M. SEURIN [34]. Nous rappelons brièvement ses caractéristiques.

Le groupe de pompage est à deux étages. Il fournit un débit volumique de trois mètres cubes par seconde pour une pression d'aspiration comprise entre 50 et 500 microns de mercure. Le caisson d'expérience a un débit de fuite de l'ordre de 1 torr.l/s. Il permet d'atteindre un vide limite de l'ordre de 5 microns de mercure.

Nous avons diminué le gradient de vitesse longitudinale dans le jet en plaçant le point d'aspiration des pompes à un mètre environ de la sortie de la tuyère. Le jet garde ainsi une section constante. Ce long tube introduit une perte de charge non négligeable, qui divise le débit d'aspiration au niveau du caisson par un facteur trois.

La pression dans le caisson est mesurée avec une jauge de Mac Leod équipée d'un piège à azote liquide.

La mesure du débit est faite par un débitmètre à bille. Le résultat est corrigé de l'erreur systématique due à la pression et à la température de l'azote.

10.1.2. Obtention de l'azote activé.-

L'écoulement d'azote est chauffé par un arc électrique (fig. 35).

La tuyère, en cuivre pur, est refroidie par une circulation d'eau; elle constitue l'anode. Sa section au col est de 11 mm et son diamètre de sortie est de 80 mm (fig. 36). La cathode est un barreau de tungstène thorié emmanché sur un barreau de cuivre pur refroidi par une circulation d'eau (fig. 37). L'ensemble est isolé de la masse suivant le montage de la figure 36.

L'arc est alimenté (fig. 38) par une batterie pouvant donner jusqu'à 2 000 ampères sous 120 volts. Un générateur haute fréquence, placé en série, permet d'amorcer l'arc. Une résistance refroidie est incorporée dans le circuit pour stabiliser l'intensité du courant [35]. La difficulté principale est le refroidissement au col. Une double chemise permet d'obtenir un meilleur échange thermique dans cette région. D'autre part, un champ magnétique d'un dixième de Tesla est produit par une bobine centrée [35] sur l'axe du jet; en particulier, il a pour rôles de faire tourner l'arc et de restreindre les dimensions de l'écoulement au col [35], [36]. Ainsi, nous avons pu fonctionner avec la tuyère précédemment décrite sans aucune usure du col durant plusieurs semaines.

Des instabilités de l'arc peuvent apparaître après un certain temps de fonctionnement; elles disparaissent lorsque l'on augmente ou diminue la distance entre électrodes. Ce phénomène peut s'interpréter par une augmentation de la résistance de surface de l'anode, par formation de nitrure. Cependant, ces variations de la distance inter électrodes ont peu d'influence sur la puissance dissipée dans l'arc (fig. 39) [36].

Le jet de plasma ainsi obtenu est cylindrique. Le diamètre du jet augmente légèrement jusqu'à une distance de l'ordre de 10 cm, en aval de la tuyère, puis il devient constant et égal à 14 cm.

La réaction catalytique est étudiée sur une plaque plane, refroidie par une circulation d'eau et placée (fig. 40) dans la partie cylindrique du jet, entre la tuyère et le conduit d'aspiration des pompes. Le convergent du conduit est refroidi par une circulation d'eau.

10.2. Mesures de concentration .-

10.2.1. Spectrographie de masse.-

Le mélange gazeux que nous avons à analyser est à très basse pression et à haute température. Cet état entraîne une masse volumique des gaz très faible.

Le spectrographe de masse est le seul moyen d'analyse qui soit adapté à ces basses pressions, car cette méthode nécessite une pression totale des gaz de l'ordre de 10^{-5} mm de mercure. Il reste la difficulté de transporter les gaz dans le spectrographe de masse sans modifier leur état. Or, l'azote atomique n'est pas en équilibre chimique dans l'écoulement; sa concentration est supérieure à la concentration à l'équilibre; et même si l'azote atomique était à l'équilibre dans l'écoulement, le refroidissement au cours du trajet dans la sonde conduirait à une concentration nulle au niveau du spectrographe de masse. Il faut donc transformer l'azote atomique instable en un corps stable avant tout transport [37], [38], [39], [40].

On sait que les carbures d'hydrogène donnent avec l'azote actif des composés à base d'acide cyanhydrique et des traces de radicaux C N et de gaz cyanogène $C_2 N_2$. La vitesse de la réaction est suffisamment rapide pour être considérée comme instantanée.

L'idée est donc d'introduire dans une chambre l'azote atomique, de le faire réagir avec l'hydrocarbure, puis de transporter les produits stables dans le spectrographe de masse. La sonde utilisée est en quartz. Ce matériau, ayant une constante de réaction catalytique très faible, ne fond pas dans l'écoulement alors que la surface d'un barreau d'acier non refroidi bout en moins d'une minute.

L'hydrocarbure est donc introduit (fig. 41) dans une chambre placée en

arrière de l'entrée de la sonde. Avec cette géométrie, nous n'avons pu observer dans le spectrographe de masse aucune formation d'acide cyanhydrique. Ce résultat est dû au fait que les gaz raréfiés ayant une viscosité cinématique très grande, la vitesse dans le tube d'entrée de la sonde est lente, et l'azote atomique a le temps de se recombinaison avant d'entrer en contact avec le carbure.

La sonde que nous avons finalement employée est représentée sur la figure 42; les gaz se mélangent en dehors de la sonde, et l'on prélève derrière cette zone une fraction de gaz stable que l'on peut analyser dans le spectrographe de masse.

L'appareil que nous avons monté est un spectrographe de masse Varian qui nous a permis de mesurer le taux d'acide cyanhydrique dans le mélange gazeux. Pour diminuer le temps de réponse, le gaz à analyser est aspiré par une pompe à vide; le spectrographe est branché entre cette pompe et la sonde.

Dans le spectrographe, les molécules à détecter sont ionisées. Cette ionisation s'accompagne d'une cassure d'un certain nombre de molécules, de sorte que des pics parasites apparaissent dans le spectre obtenu. La plupart des carbures donnent l'ion $C_2 H_3^+$ qui a la même masse moléculaire que l'acide cyanhydrique. Même l'acétylène, de masse vingt-six, donne un certain pourcentage de masse vingt-sept due à la recombinaison d'atomes d'hydrogène provenant du cracking et de molécules d'acétylène.

L'expérience nous a montré que seul le méthane ne donne pas le pic vingt-sept parasite, ce qui permet de détecter l'acide cyanhydrique⁽¹⁾ (fig. 44 et 45).

Dans ces conditions, la concentration molaire en azote atomique (nombre de moles d'azote atomique/nombre de moles total) sera obtenue en faisant le rapport de la somme des hauteurs des pics 26 (C N) et 27 (H C N) à la somme des hauteurs des pics 26 (C N), 27 (H C N), 28 (N₂) et de la moitié de la hauteur du pic 14 dû à la dissociation de N₂⁽²⁾ (fig. 43).

Pour être sûr que tout l'azote atomique aspiré par la sonde a réagi avec le méthane, nous avons étudié comment variaient les concentrations d'azote atomique mesurées en fonction de la quantité de méthane injecté dans la sonde, lorsque toutes les autres conditions restent égales. On voit, sur la figure 46, que, pour

.../...

(1) Le spectre obtenu à l'aide de l'azote actif et du méthane présente, en outre, le pic 26 négatif, que l'on attribue à des ions $C N^-$ provenant de la décomposition de H C N.

(2) Dans les conditions expérimentales employées, la concentration des atomes d'azote provenant de la dissociation de N₂ dans le spectrographe de masse est égale à 0,08 [N₂].

une concentration de méthane aspiré supérieure à 40%, le pourcentage d'azote atomique mesuré ne varie plus.

Le spectrographe travaillant à pression constante, les mesures seront d'autant plus précises que la proportion d'azote et d'acide cyanhydrique dans le mélange sera plus élevée. On a donc intérêt à travailler avec le débit minimal de $C H_4$ nécessaire à la transformation complète de N en H C N (40% du mélange). Ceci correspond à une injection de méthane de $40 \text{ mm}^3/\text{s}$ rapportés aux conditions normales.

Cette méthode a l'avantage de fournir une valeur absolue de la concentration en azote atomique.

10.2.2. Méthode optique.-

La réaction dont nous avons déjà parlé :



est lumineuse et peut être utilisée pour doser l'azote atomique par une méthode optique [41]. Si la concentration en $C H_4$ est suffisante, on peut considérer que l'énergie rayonnée sera proportionnelle à la concentration en azote atomique [48].

La sonde employée est un tube de quartz de 8 mm de diamètre. L'axe du tube est perpendiculaire à la plaque. On distingue parfaitement à l'œil nu une très forte coloration bleue au point d'injection du méthane (1).

Pour mesurer l'intensité lumineuse de la réaction, on forme, sur un photomultiplicateur, l'image de la région voisine de la sortie de la sonde (fig. 47). Il faut cependant noter que l'on intègre ainsi la lumière émise par tout le reste du plasma sur l'axe optique du système. La mesure sera d'autant plus précise que, dans le rayonnement reçu par le photomultiplicateur, la part due à la réaction chimique est plus grande. Il faut donc que l'intensité I_0 , obtenue sans injection de méthane, soit petite devant l'intensité I obtenue avec l'injection. En choisissant convenablement la zone spectrale, nous avons pu obtenir un rapport I/I_0 égal à 6. On trouve, sur la figure 48, la courbe d'absorption lumineuse du filtre employé. Si l'on admet que l'émission lumineuse est proportionnelle à la concentra-

.../...

(1) On observe la même coloration bleue avec tous les hydrocarbures; par contre, une injection d'ammoniac donne une coloration orangée. La coloration bleue est donc associée à la formation de l'acide cyanhydrique.

tion en azote atomique, la concentration relative $[N]/[N]_{\infty}$ est égale au rapport $(I - I_0)/(I_{\infty} - I_0)$, où I_{∞} est l'intensité lumineuse de référence; pour l'étude de la couche limite, I_{∞} sera l'intensité lumineuse prise en dehors de la couche limite.

La validité de cette hypothèse est bien vérifiée par l'ensemble des résultats, que nous avons portés sur la figure 53.

Cette méthode a l'avantage de nécessiter seulement l'emploi d'un tube de quartz, pour injecter le gaz, et d'un appareillage optique simple.

10.2.3. Méthode calorimétrique.-

L'énergie de dissociation de l'azote atomique est libérée sous forme calorifique lors de sa recombinaison. En mesurant la quantité de chaleur due à la recombinaison pour une masse donnée d'azote, on peut remonter, si l'on connaît la température et la vitesse du gaz, à la concentration en azote atomique [4]. Il faut donc prélever une partie du gaz aussi ponctuellement que possible et mesurer la quantité de chaleur qu'il peut transmettre à une paroi froide.

Les sondes employées [42] sont constituées de trois tubes concentriques. On aspire un certain débit massique par le tube intérieur, et le gaz transmet son énergie calorifique à de l'eau qui circule dans les deux autres tubes concentriques. Deux thermocouples, placés aux extrémités de ce circuit, permettent de connaître l'élévation de température de l'eau.

En mesurant les débits d'eau et de gaz aspiré ainsi que les températures de l'eau, avec ou sans pompage dans la sonde, on peut, par différence, en déduire le flux de chaleur reçu par la face interne de la sonde et le flux de chaleur reçu par la surface extérieure.

Lors des premiers essais, nous avons constaté qu'aucune variation des températures de l'eau n'était détectable lorsque le débit interne du gaz variait. Nous avons attribué ce fait à la grande valeur du rapport de la surface externe à celle de l'extrémité de la sonde, puisque les énergies reçues à l'extérieur et à l'intérieur de la sonde sont proportionnelles à ces surfaces.

Pour éviter cette difficulté, nous avons isolé le circuit d'eau intérieur de l'extérieur de la sonde de la manière suivante.

Une sonde refroidie par deux circulations d'eau a été construite (fig.49).

Dans le circuit extérieur, le débit d'eau est maximal; ainsi, l'élévation de température est faible. Dans le circuit intérieur, le débit est faible, ce qui permet, même pour un très faible apport de chaleur en bout de sonde, d'avoir une différence appréciable de température aux extrémités de ce circuit d'eau. L'arrivée de l'eau est commune aux deux circuits. De ce fait, la température de l'eau reste pratiquement identique dans les deux circuits jusqu'à l'extrémité de la sonde (fig. 48); on réduit ainsi les échanges calorifiques. Pour estimer ces échanges entre les circuits, nous avons tracé (fig. 49), pour un flux de chaleur donné, l'énergie reçue $Q \cdot \Delta T$ (débit massique d'eau multiplié par son élévation de température) en fonction du débit d'eau dans le circuit intérieur. On voit, sur la figure 50, que, au-dessus de $5 \text{ cm}^3/\text{s}$, le produit $Q \cdot \Delta T$ est constant. Les pertes calorifiques sont donc négligeables au delà de ce débit d'eau de $5 \text{ cm}^3/\text{s}$.

Pour éviter les erreurs dues aux différences de potentiel parasites qui peuvent apparaître dans le circuit de mesure, on utilise la méthode suivante.

Avant chaque mesure, on augmente le débit dans le circuit intérieur de telle manière que les thermocouples soient à la même température, et l'on règle alors le voltmètre de mesure à zéro.

Lors des premiers essais de cette sonde, nous avons constaté que le flux de chaleur mesuré était indépendant de l'aspiration des gaz. Cela est dû à la viscosité cinématique très importante des gaz raréfiés portés à hautes températures ($V \approx 2 \text{ M.K.S.A}$). Il est ainsi pratiquement impossible de pomper un débit de gaz important dans un petit tube. La valeur du flux thermique reçu par la sonde est comparable à celle obtenue en un point d'arrêt.

Essayons d'évaluer l'énergie captée par la sonde en séparant le flux de chaleur reçu par conduction et le flux de chaleur reçu par recombinaison catalytique sur la surface.

Si l'on calcule le nombre de Reynolds et le nombre de Péclet relatifs à la dimension du plus petit rayon de courbure des lignes de courant de la sonde, on s'aperçoit qu'ils sont inférieurs à l'unité. Dans ces conditions, on peut [43] estimer le flux de chaleur qu'un fluide transmet par conduction en un point d'arrêt : on trouve comme nombre de Nusselt :

$$\text{Nu} = 2 \quad .$$

D'où :

$$\frac{\phi_p}{S} = Nu \cdot \frac{\lambda}{d} \cdot \Delta T \quad .$$

L'écart de température est de $1\,700^\circ$; la température moyenne est de $1\,000^\circ$, d'où :

$$(10.1) \quad \left(\frac{\phi_p}{S} \right)_{\substack{\text{conduction} \\ \text{thermique}}} \simeq 4 \cdot 10^3 \text{ watt/m}^2 \quad .$$

De la même façon que précédemment, on peut, à partir d'une distribution de vitesse dans l'écoulement de Stokes, calculer le flux de chaleur cédé du fait de la recombinaison catalytique à la paroi [44]. On trouve que le régime est contrôlé soit par la réaction catalytique, soit par la diffusion, suivant les valeurs du paramètre :

$$K = \frac{d(k_i + k_d)}{D} \quad ,$$

où $k_i + k_d$ est la somme des vitesses de la réaction catalytique ($k_d \gg k_i$: il n'y a pas de dissociation à la température de la plaque 500°C), d , le rayon de courbure minimal des lignes de courant, D , le coefficient de diffusion massique.

Si K est petit devant l'unité, le régime est contrôlé par la réaction catalytique. Dans le cas présent, K est voisin de 0,1. On trouve, comme expression du flux de chaleur au point d'arrêt,

$$\left(\frac{\phi_p}{S} \right)_{\text{catalytique}} = h_R \rho a \cdot (k_i + k_d) \quad ,$$

où h_R est la chaleur de la recombinaison, ρ , la masse volumique prise à une température moyenne, $\rho \cdot a$, la concentration massique de l'azote atomique.

Ici :

$$h_R = 3,5 \cdot 10^7 \text{ watt/kg}$$

$$(k_i + k_d) = 50 \text{ m/s (surface recouverte d'argent)}$$

$$\rho(1000^\circ\text{C}) = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m}^3$$

$$a = 0,15 \quad ;$$

on trouve :

$$(10.2) \quad \left(\frac{\phi_p}{S} \right)_{\text{catalytique}} \approx 4 \cdot 10^4 \text{ watt/m}^2 \quad .$$

Si l'on compare les valeurs (10.1) et (10.2), on voit que l'énergie apportée par conduction (10.1) est négligeable devant l'énergie apportée par la réaction catalytique (10.2).

Ce dernier résultat permet de comprendre pourquoi le flux de chaleur est proportionnel à la concentration. En prenant des valeurs relatives, nous éliminons l'erreur systématique de 10% due à la conduction.

La concentration relative dans la couche limite sera :

$$\frac{a}{a_\infty} = \frac{[N]}{[N]_\infty} = \frac{H}{H_\infty} \quad .$$

Cette méthode a l'avantage de s'accompagner d'une mesure de pression d'arrêt faite dans le tube intérieur.

10.3. Résultats. -

Nous avons mesuré les variations des flux de chaleur relatifs et de la pression d'arrêt le long du jet de plasma à l'aide de la sonde thermique.

Nous avons porté sur la figure 51 les variations de la pression d'arrêt⁽¹⁾ en fonction de la distance à la tuyère et du rayon : la variation de pression d'arrêt longitudinale est faible; ce fait est confirmé par la forme cylindrique du jet.

On vient de voir précédemment que le flux de chaleur capté par la sonde est proportionnel à la concentration en azote atomique. Sur la figure 52, nous avons porté ce flux en fonction des coordonnées. La variation longitudinale est faible (ce qui correspond à l'hypothèse d'un écoulement figé). Le gradient de concentration qui existe est dû à la diffusion de l'azote atomique. En effet, on peut faire un bilan du flux de masse qui sort de la surface définie par les sections circulaires situées à 180 mm et à 340 mm de la tuyère et par la surface cy-

.../...

(1) L'erreur commise en mesurant une pression d'arrêt à faible nombre de Reynolds et à un nombre de Mach voisin de 1 unité a été estimée inférieure à 10% dans les conditions de l'expérience [47].

lindrique limitant le jet. On a :

$$2 \pi R_0 D \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial a}{\partial R} \right)_x dx = \int_0^{R_0} 2 \pi a_1(R) \cdot u(R) R dR$$

$$- \int_0^{R_0} 2 \pi a_2(R) \cdot u(R) R dR = 2 \pi U_{\max} \int_0^{R_0} \left[a_1(R) - a_2(R) \right] \left[1 - \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \right] R dR ;$$

$(\partial a / \partial R)$ et $[a_1(R) - a_2(R)]$ sont calculés expérimentalement sur la figure 52.

On vérifie, à 10% près, que ces deux expressions sont identiques.

La vitesse sera calculée dans les pages suivantes.

Lorsque l'on pose dans l'écoulement la plaque plane, on voit sur la surface une variation d'intensité lumineuse qui est due à la réaction catalytique (fig. 40).

On mesure successivement par les trois méthodes les profils de concentration relative, ce qui diminue les erreurs systématiques des mesures. On voit qu'aux erreurs d'expérience près, ces différentes méthodes donnent le même résultat, ce qui justifie a posteriori les hypothèses faites pour les mesures d'intensité lumineuse et pour la sonde thermique (fig. 53).

On détermine une valeur de la concentration pariétale en extrapolant les profils de la couche limite jusqu'à la paroi. Ceci est justifié par la théorie qui nous montre la quasi-linéarité de ces profils au voisinage de la paroi.

On constate d'abord que le flux de masse à la paroi $(\partial a / \partial y)_p$ est proportionnel à la concentration pariétale a_p . Cela prouve que la réaction est bien du premier ordre.

Si l'on calcule Z' par la relation $a_p(Z')$ (fig. 7), on vérifie que $Z' / \sqrt{x}$ est une constante égale à $9,5 \cdot 10^{-2}$, ce qui permet de calculer le nombre de Damköhler de la réaction par la relation (6.55) :

$$\frac{Z'}{\sqrt{x}} = \frac{1}{0,339} Da \cdot Sc^{2/3} .$$

Dans cette expression, il faut connaître la vitesse u_∞ pour calculer la vitesse de la réaction catalytique (3.14).

Pour déterminer ce paramètre, nous avons à notre disposition certains résultats : le débit massique total m , la distribution des pressions d'arrêt et des

concentrations par photographie et par les courbes précédentes.

Pour calculer la vitesse à partir de ces informations, des hypothèses supplémentaires sont nécessaires : nous supposerons que le profil des vitesses dans le jet est parabolique et que la température est constante dans le jet. Cette dernière hypothèse peut être justifiée par le fait que les courbes de concentration sont assez plates et que les nombres de Schmidt et de Prandtl ont même ordre de grandeur.

Avec ces hypothèses, on aura pour débit massique total, en désignant par ρ_c la masse volumique au centre du jet et R_0 le rayon du jet,

$$\sum_0^{R_0} u \rho_c 2 \pi R dR = m \quad ,$$

soit, avec les hypothèses précédentes,

$$\rho_c U_{\max} 2 \pi \int_0^{R_0} \left[1 - \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \right] R dR \quad ,$$

ou

$$\rho_c U_{\max} \frac{\pi}{2} R_0^2 = m \quad .$$

Or, d'après la définition de la pression d'arrêt,

$$\frac{\rho_c U_{\max}^2}{2} = \rho_{Hg} \cdot g \cdot \Delta h \quad ,$$

d'où, en résolvant ces deux équations,

$$U_{\max} = \frac{\pi R_0^2 \rho_{Hg} g \Delta h}{m} \quad ,$$

$$R_0 = 7 \text{ cm} \quad , \quad \Delta h = 2,4 \cdot 10^{-4} \text{ m} \quad , \quad g = 9,81 \text{ m/s}^2 \quad ,$$

$$\rho_{Hg} = 13,6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \quad , \quad m = 4,5 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m}^3 \quad ,$$

on trouve :

$$U_{\max} = 900 \text{ m/s} \quad , \quad \rho_c = 5,4 \cdot 10^{-5} \text{ kg/m}^3 \quad .$$

Si l'on suppose le gaz parfait, on peut calculer une température moyenne de l'écoulement :

$$\bar{T} = 2\ 000^{\circ}\text{C} \quad .$$

Reportons cette valeur de la vitesse dans l'expression du nombre de Damköhler. On trouve :

$$(k_i + k_d) = 36 \text{ m/s} \quad .$$

Cette valeur avait déjà été obtenue par GOULARD [4] à l'aide d'une sonde thermique placée dans un écoulement hypersonique.

CHAPITRE 11

Conclusion

Par ce travail théorique et expérimental, nous avons étudié différents cas de réaction catalytique dans une couche limite laminaire. Nous avons montré :

a) que l'on peut calculer avec une erreur de moins de 1% les profils de concentration et de vitesse dans des couches limites qui ne sont pas en similitude;

b) que l'analogie thermique permet de résoudre n'importe quel problème de réaction catalytique, si l'on suppose que l'ordre de la réaction est égal à l'unité et que l'on connaît les constantes de vitesse de la réaction;

c) que l'on peut déterminer les constantes de vitesse et l'ordre de la réaction de recombinaison de l'azote atomique sur une paroi d'acier en mesurant les gradients de concentrations dans la couche limite d'une plaque plane placée dans un jet d'azote atomique. Les résultats expérimentaux concordent entre eux et vérifient la théorie précédente.

Cette méthode expérimentale peut s'appliquer à toutes les réactions catalytiques. Elle permet de séparer nettement le phénomène de transport par diffusion du phénomène de la réaction catalytique.

ANNEXE

Spectrographe de masse Varian

Le spectrographe de masse Varian est un appareil sensible au rapport M/q , M étant la masse d'un ion et q , sa charge.

Le principe en est le suivant : le gaz à analyser est ionisé par un canon à électrons, les ions formés sont introduits dans un tube quadripolaire, dont les électrodes sont soumises à une tension de fréquence variable. Pour une fréquence donnée, seuls les ions dont la trajectoire est rectiligne et parallèle au quadripole, correspondent à une valeur unique du rapport M/q . Les autres ions ne sont pas collectés.

En faisant varier la fréquence, on balaie le spectre des valeurs M/q .

Ce dispositif fonctionne à une pression comprise entre 10^{-5} et 10^{-11} torr; il est donc bien adapté à des mesures en gaz raréfié.

Nous distinguerons trois parties dans l'ensemble de l'appareillage (fig. 54 et 55) :

- a) un groupe de pompage permettant d'obtenir une pression de l'ordre de 10^{-9} torr;
- b) une vanne automatique d'admission des gaz à analyser commandée par un appareil de mesure de la pression de l'enceinte du quadripole;
- c) le spectrographe lui-même comprenant : le tube quadripolaire et son alimentation; un appareil d'amplification du courant ionique collecté et un enregistreur.

Nous considérerons successivement ces différentes parties.

- a) le groupe de pompage aspire 200 ℓ/s à 10^{-5} torr, au niveau de la pompe à diffusion, qui est équipée d'un baffle supplémentaire refroidi par une circulation d'eau, et d'un piège à zéolithe.

L'étanchéité est assurée par des joints en or, pour permettre un étuvage à 400°C .

Divers dispositifs de sécurité ont été installés (fig. 56) permettant un fonctionnement ininterrompu du groupe de pompage.

b) La pression dans l'enceinte est mesurée avec un manomètre à ionisation type IM IV (Leybold's). Il permet de mesurer avec précision des pressions comprises entre 10^{-3} et 10^{-12} torr.

La tension du signal de sortie est comprise entre 0 et 10 volts, quelle que soit l'échelle de mesure des pressions.

La vanne automatique d'introduction du gaz à analyser (Granvil Phillips Company, Automatic Pressure Controller) permet de régler la pression dans le spectrographe de masse entre 10^{-9} torr (vide limite) et 10^{-5} torr (valeur adoptée dans nos mesures).

La pression affichée sur l'une des dix-sept échelles de mesure du manomètre à ionisation est maintenue avec une précision égale à 1% de la pression maximale de l'échelle utilisée.

c) La résolution d'un spectrographe de masse est définie par le rapport $M/\Delta M$, où M est la masse atomique et ΔM , la largeur du pic, exprimée en unité de masse atomique et mesurée à la demi-hauteur du pic.

L'ensemble quadripole-alimentation Varian permet l'analyse des gaz, de masses moléculaires comprises entre 1 et 50 avec une résolution de 50, ou de masses moléculaires comprises entre 10 et 250 avec une résolution de 20.

L'amplificateur utilisé est le "Keithley Instruments"; il mesure des courants compris entre 10^{-5} ampère et 10^{-13} ampère. Son temps de réponse est de 30 millisecondes. Sa précision est de $\pm 3\%$ de la déviation totale de l'échelle utilisée.

Les variations de la tension de sortie sont tracées sur l'enregistreur Philipps PR 2500/00, dont la constante de temps et la sensibilité sont bien adaptées aux caractéristiques de l'amplificateur.

Remarque : L'appareil est sensible au rapport M/q . La tension enregistrée sera positive ou négative suivant le signe des ions collectés. Par exemple, des traces de CN^- sont détectées dans le spectre de H C N.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E.A. BRUN, Problèmes de rentrée.
Cours à l'Ecole Supérieure de l'Aéronautique, 1963.
- [2] E.A. BRUN, Introduction à l'étude de la couche limite.
(Gauthier Villars, 1955).
- [3] B. LE FUR, Convection de la chaleur dans un gaz en régime laminaire dans le cas d'un gradient de pression et d'une température de paroi quelconques.
(International Journal of Heat and Mass Transfer, vol.3, n°4, Déc. 1961).
- [4] R. GOULARD, On catalytic recombination rates in hypersonic stagnation heat transfer.
(Jet Propulsion, vol.28, n°11, Nov. 1958).
- [5] H. SCHLICHTING, Boundary layer theory.
(Pergamon Press LTD, 1955).
- [6] P.M. CHUNG et P.M. ANDERSON, Heat transfer to surfaces of finite catalytic activity in frozen dissociated hypersonic flow.
(N.A.S.A. T.N.D. 350, Janv. 1961).
- [7] P.L. CHAMBRÉ et ACRIVOS, On chemical surface reaction in laminar boundary layer.
(Journal of Applied Physics, vol. 27, n°11, Nov. 1956).
- [8] P.L. CHAMBRÉ et ACRIVOS, Laminar boundary layer flows with surface reactions.
(Industrial and Engineering Chemistry, vol.49, n°6, Juin 1957).
- [9] M.J. LIDTHILL, Contribution to the theory of heat transfer through a laminar boundary layer.
(Proceeding Royal Society London, A 202, p.359-377, 1950).
- [10] P.M. CHUNG, S. LIU et H. MIRELS, Effects of discontinuity of surface catalycity on boundary layer flow of dissociated gas.
(International Journal of Heat and Mass Transfer, vol.6, n°3, Mars 1963).
- [11] P. LIBBY et H. FOX, Some perturbation solution in laminar boundary layers theory.
(Journal of Fluid Mechanics, vol.17, part.3, Nov. 1963).
- [12] H. FOX et P.A. LIBBY, Dissociated laminar boundary layers with heterogeneous recombination.
(Physics of Fluids, vol.9, n°1, Janv. 1966).
- [13] P.A. LIBBY et H. FOX, A moment method for compressible laminar boundary layers and some applications.
(Pibal 615, Department of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Polytechnic Institute of Brooklyn, New York, 1964).
- [14] G.R. INGERS, Dissociated laminar boundary layer flows over surfaces with arbitrary continuous distributions of catalycity.
(International Journal of Heat and Mass Transfer, vol.6, n°9, Sept. 1963).

- [15] G.R. INGERS, Highly nonequilibrium boundary layer flows of a multicomponent dissociated gas mixture.
(International Journal of Heat and Mass Transfer, vol.7, n°11, Nov. 1964).
- [16] P.G. SIMPKINS, Diffusion of species over surfaces with discontinuous catalycity.
(Physics of Fluids, vol.9, n°6, Juin 1966).
- [17] P.G. SIMPKINS, Some experiments in partially dissociated boundary layer.
(Journal of Fluid Mechanics, vol.26, part.1, Sept. 1966).
- [18] D.E. ROSNER, The apparent kinetics of surface reactions in external flow systems : diffusional falsification of activation energy and reaction order.
(A.I.C.H.E. Journal, vol.9, n°3, Mai 1963).
- [19] D.E. ROSNER, Convective as an intrude in kinetics studies of surface catalysed reactions.
(A.I.A.A., n°4, Avril 1964).
- [20] T.Y. LI et KIRK, Asymptotic method of solution of the frozen dissociated laminar boundary layer flow over a flat plate surface with arbitrarily distributed catalycity.
(International Journal of Heat and Mass Transfer, vol.10, n°3, Mars 1967).
- [21] D. MEKSYN, New methods in laminar boundary layer theory.
(Pergamon Press, Oxford, 1961).
- [22] W. DORRANCE, Viscous hypersonic flow.
(Pergamon Press, 1961).
- [23] B. LE FUR, Nouvelle méthode de résolution des équations de la couche limite laminaire.
(Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air, n°383, 1962).
- [24] J.C. JUNGERS, Cinétique chimique appliquée.
(Technip, Paris, 1958).
- [25] Handbook of Mathematical Functions.
(National Bureau of Standard, Washington, 1964).
- [26] A. ERDELYI, Tables of integral transform.
(Mc Graw Hill Book Co., 1954).
- [27] E. GOURSAT, Cours d'analyse.
(tome III, Gauthier Villars, 1956).
- [28] L. POLI, Règles pour le calcul symbolique. Nouveau théorème du produit.
(Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, n°63, p.154-155, 1949).
- [29] G. IASSAU, Expression approchée des profils de vitesse et de concentrations dans une couche limite laminaire.
(C.R. Acad. Sc. Paris, 261, 4617-4620, 29 nov. 1965).
- [30] P. THUREAU, Etude d'une méthode de mesure des températures par fluorescence.
(Publ. Sci. et Techn. du Ministère de l'Air, n°349, Paris, 1959).
- [31] M. CHOIGNOT, Une méthode de mesure de températures de surface utilisant la sensibilité thermique de la luminescence.
(International Journal of Heat and Mass Transfer, vol.7, n°5, Mai 1964).

- [32] HAENIG, Use of a catalytic probe for detection of dissociated nonequilibrium states in hypersonic flow.
(A.R.S. Journal, vol.29, n°5, Mai 1959).
- [33] D.E. ROSNER, Catalytic probes.
(A.R.S. Journal, vol.32, 1065-1073, 1962).
(A.I.A.A. Journal, vol.2, n°4, 1964).
- [34] Ph. SEURIN, Effet de la température de paroi sur l'écoulement dans une tuyère supersonique de soufflerie à basse densité.
(Thèse soutenue à la Faculté des Sciences de Paris, 20 juin 1966).
- [35] M.H. JACQUELIN, Réalisation et étude d'un écoulement continu de plasma dans une tuyère en présence d'un champ magnétique axial.
(Thèse soutenue à la Faculté des Sciences de Paris, n°726, 1962).
- [36] J.M. ALLIOT, Fluctuations de température dans un jet de plasma.
(Thèse soutenue à la Faculté des Sciences de Paris, 5 mai 1967).
- [37] FONTIJN, ROSNER, KURZIUS, Chemical scavenger probe determinations of atom and excited molecule concentrations in nonequilibrium supersonic stream of active nitrogen.
(Aerochem. Research Laboratories, Août 1962).
- [38] L. ELLIAS, Measurements of N atom content of active nitrogen.
(Journal of Chemical Physics, vol.42, n°12, Juin 1965).
- [39] BLADES et C.A. WINKLER, Mesure des vitesses de la réaction de destruction du méthane par l'azote atomique.
(Canadian Journal Chemical, vol.29, p.1022, 1951).
- [40] HERRON, FRANKLIN et BRADT, Etude par spectrométrie de masse de la réaction de quelques hydrocarbures avec l'azote actif.
(Canadian Journal Chemical, vol.37, p.579, 1959).
- [41] YOUNG et SHARPLESS, Chemiluminescent reactions involving atomic oxygen and nitrogen.
(Journal of Chemical Physics, vol.39, n°4, Août 1963).
- [42] G. AU et U. SPRENGEL, Kalorimetrische Messungen von örtlichen Temperaturen und geschwindigkeiten in einem stickstoff-plasmastrahl.
(Z. Flugwiss, 14 (1966) Heft 4).
- [43] A. ACRIVOS et GODDARD, Asymptotic expansions for laminar forced convection heat and mass transfer low speed flow.
(Journal of Fluid Mechanics, vol.33, n°2, Oct. 1965).
- [44] HARTUNIAN et LIU, Slow flow of a dissociated gas about a catalytic probe.
(Physics of Fluids, vol.6, n°3, Mars 1963).
- [45] CURNEY, General formulation of surface catalytic reactions.
(A.I.A.A. Journal, vol.4, n°7, Juillet 1966).
- [46] P. LIBBY, Boundary conditions for some surface catalyzed reactions.
(A.I.A.A. Journal, vol.3, n°6, Mai 1965).
- [47] K.R. ENKENHUS, Pressures probes at very low density.
(University of Toronto, U.T.I.A. Report 43, Janvier 1957).
- [48] A. van TIGGELEN et A. FEUGIER, Chimiluminescence et chimionisation dans les flammes.
(Revue de l'Institut Français du Pétrole, vol.XX, n°7, Juillet 1965).

TABLE DES MATIERES

	Page
NOTATIONS.....	III
CHAPITRE 1.- Introduction.....	1
CHAPITRE 2.- Travaux antérieurs.....	3
CHAPITRE 3.- Mise en équations.....	5
CHAPITRE 4.- Méthode d'intégration analytique.....	10
CHAPITRE 5.- Calcul des profils des vitesses dans le cas de la première approximation.....	13
5.1.- Formule générale.....	13
5.2.- Cas particulier de la similitude.....	17
CHAPITRE 6.- Calcul des profils de concentration dans le cas de la première approximation.....	19
6.1.- Formule générale.....	19
6.2.- Cas particulier de la similitude.....	24
6.2.1.- Cas particulier d'une concentration constante à la paroi.....	24
6.2.2.- Calcul des profils de concentration dans le cas d'une plaque plane avec distribution de concentration pariétale réduite en puissance de l'abscisse.....	25
6.3.- Cas d'une réaction du premier ordre à la paroi sur une plaque plane.....	26
6.3.1.- Calcul de la distribution de concentration sur la paroi.....	26
6.3.2.- Profil de concentration dans la couche limite.....	29
6.4.- Etude d'un sillage "catalytique".....	30
6.5.- Cas de discontinuités quelconques de catalyseur et d'une réaction d'ordre quelconque.....	32
6.5.1.- Méthode d'intégration générale.....	32
6.5.2.- Résultats.....	34
6.6.- Conclusion.....	35
CHAPITRE 7.- Deuxième approximation dynamique.....	36
CHAPITRE 8.- Deuxième approximation pour les profils de concentration	43
8.1.- Résolution générale.....	43

	Page
8.2.- Calcul de la deuxième approximation dans des cas particuliers.....	51
8.2.1.- Cas d'une concentration constante.....	51
8.2.2.- Cas où $\theta_p(t) = \theta^* x^L$	53
8.2.3.- Calcul de la deuxième approximation dans le cas d'une plaque plane avec conditions de Fourier.....	54
8.3.- Conclusion de cette analyse théorique.....	56
CHAPITRE 9.- Résolution par une méthode analogique.....	58
9.1.- Principe de l'analogie thermique.....	58
9.2.- Méthode expérimentale.....	60
9.3.- Exploration thermique de la couche limite.....	61
9.4.- Autres applications de l'analogie thermique.....	64
9.5.- Conclusion.....	65
CHAPITRE 10.- Mesure d'une vitesse de réaction catalytique par la détermination des profils de concentration.....	66
10.1.- Réalisation d'un jet de plasma à basse pression.....	66
10.1.1.- Soufflerie.....	66
10.1.2.- Obtention de l'azote activé.....	67
10.2.- Mesures de concentration	68
10.2.1.- Spectrographie de masse.....	68
10.2.2.- Méthode optique.....	70
10.2.3.- Méthode calorimétrique.....	71
10.3.- Résultats.....	74
CHAPITRE 11.- Conclusion.....	78
ANNEXE.- Spectrographe de masse Varian.....	79
BIBLIOGRAPHIE.....	81
TABLE DES MATIERES.....	84



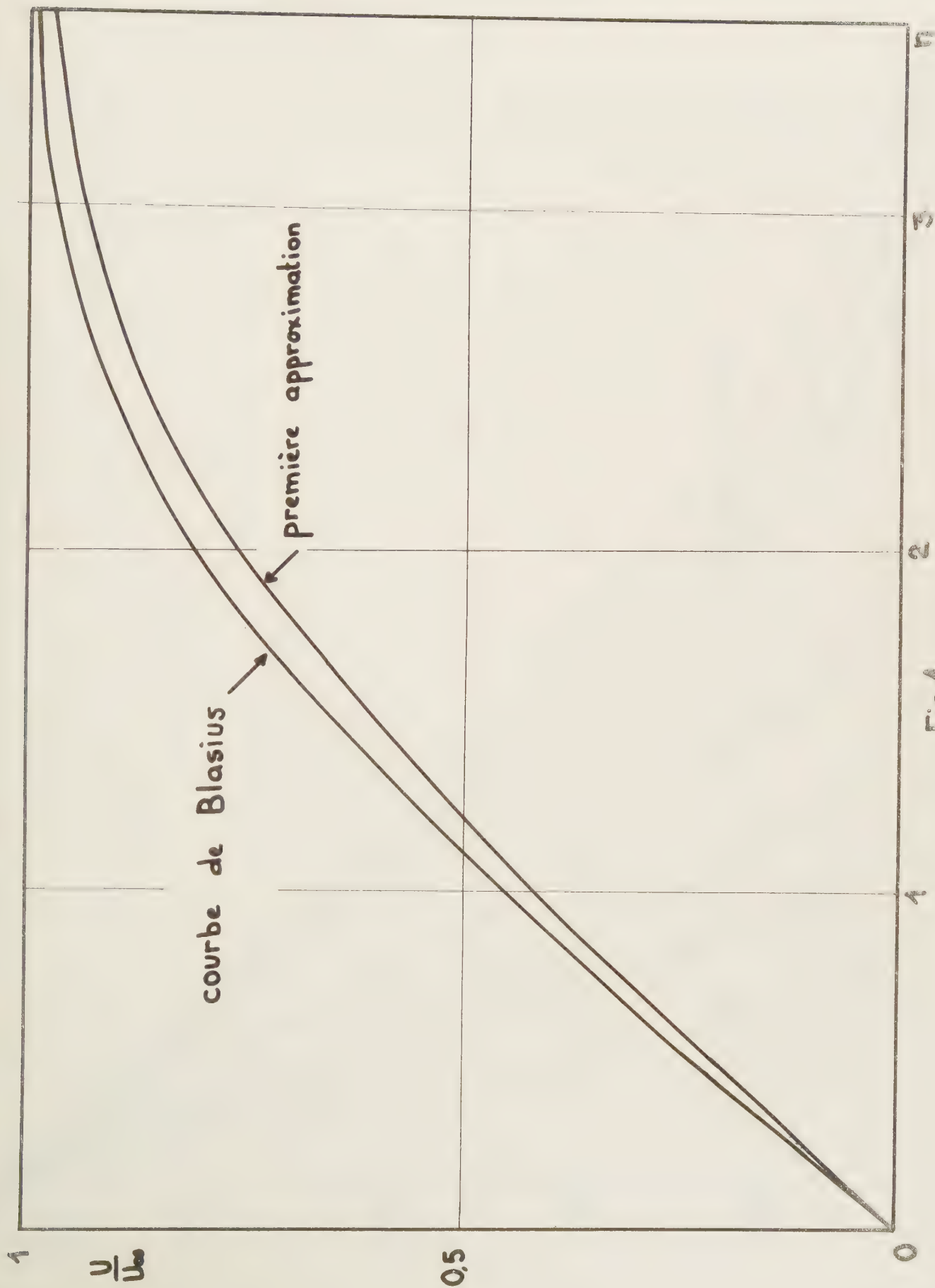
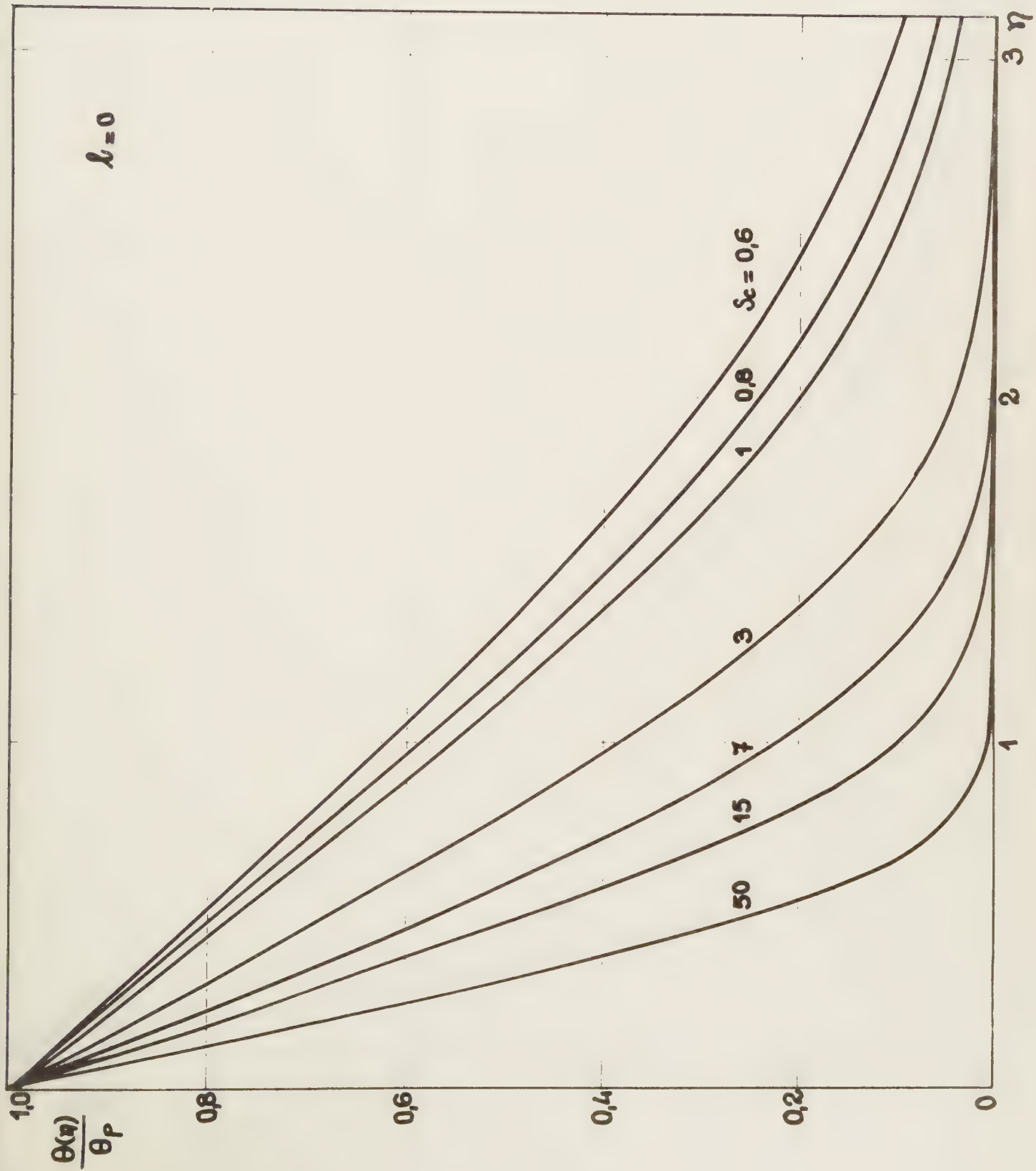


Fig. 1



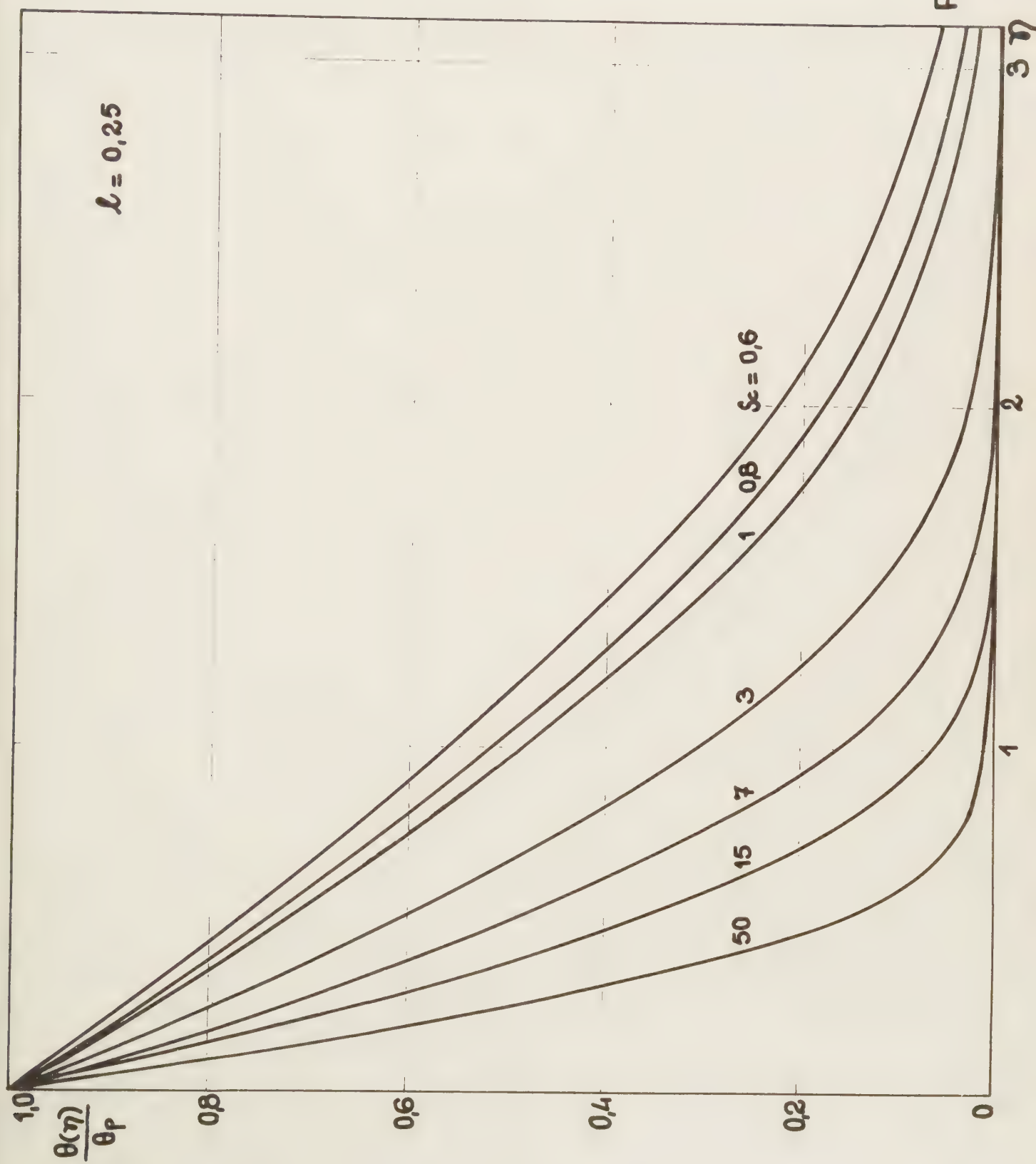


Fig. 3

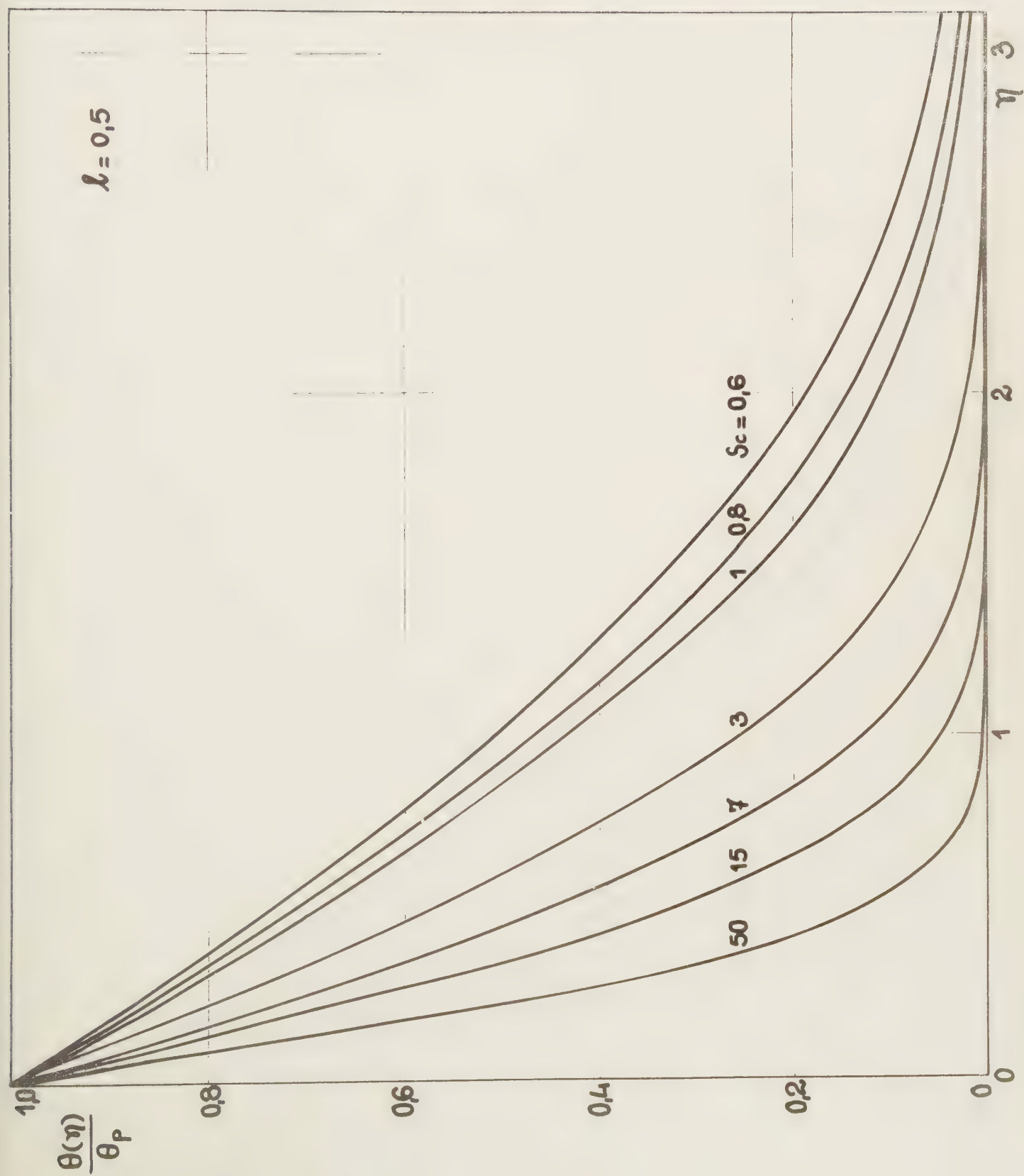


Fig. 4

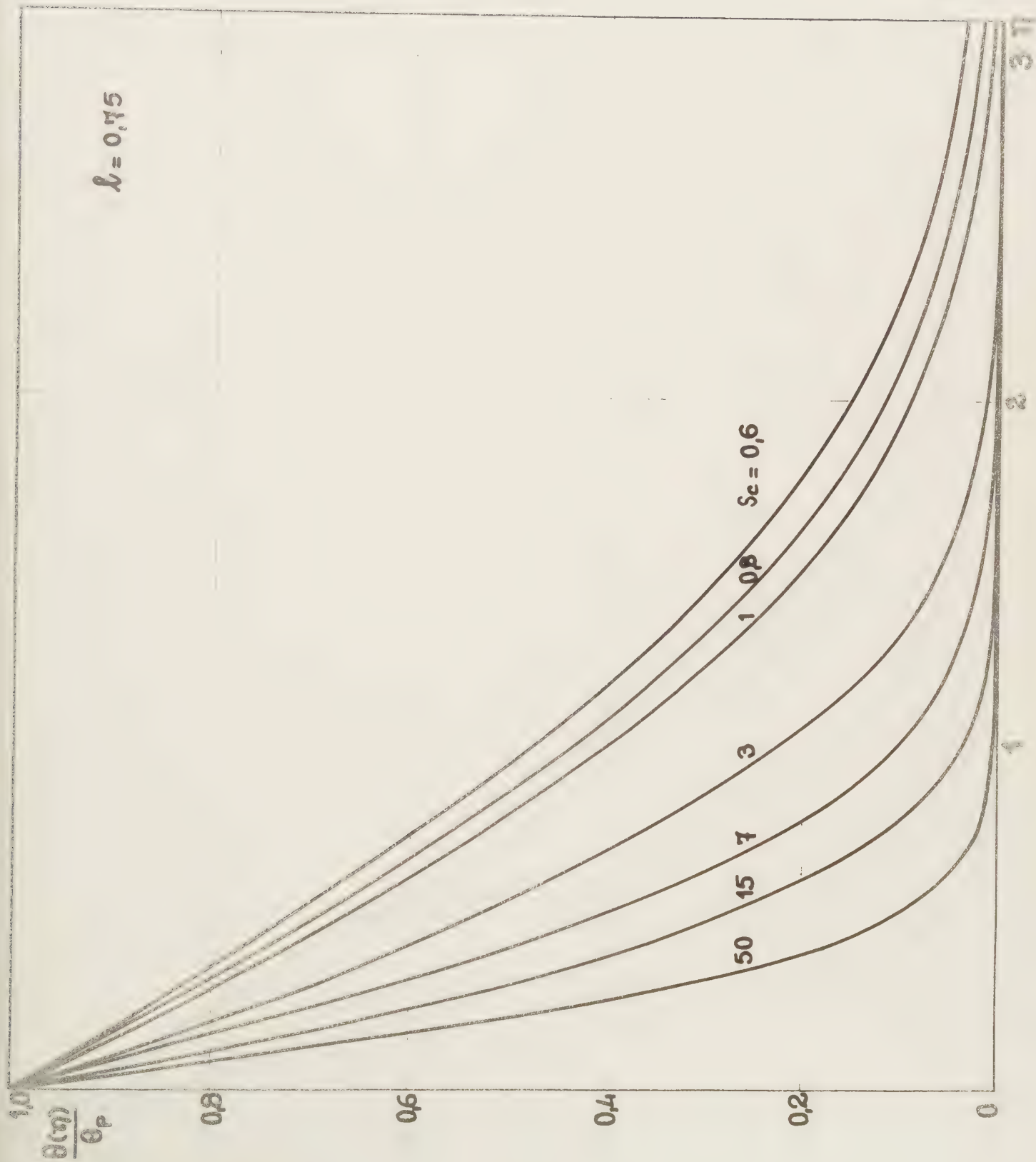


Fig. 5

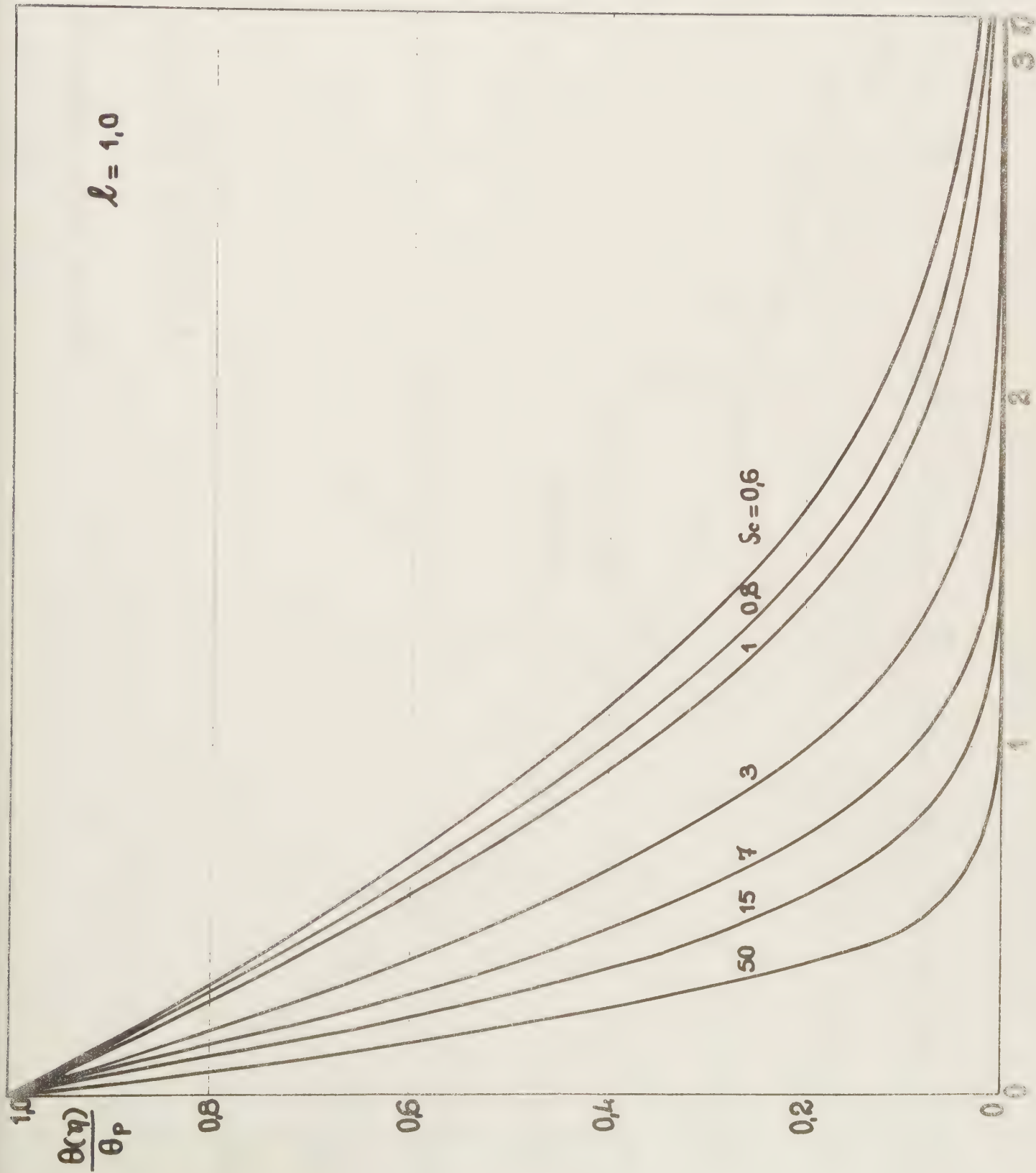
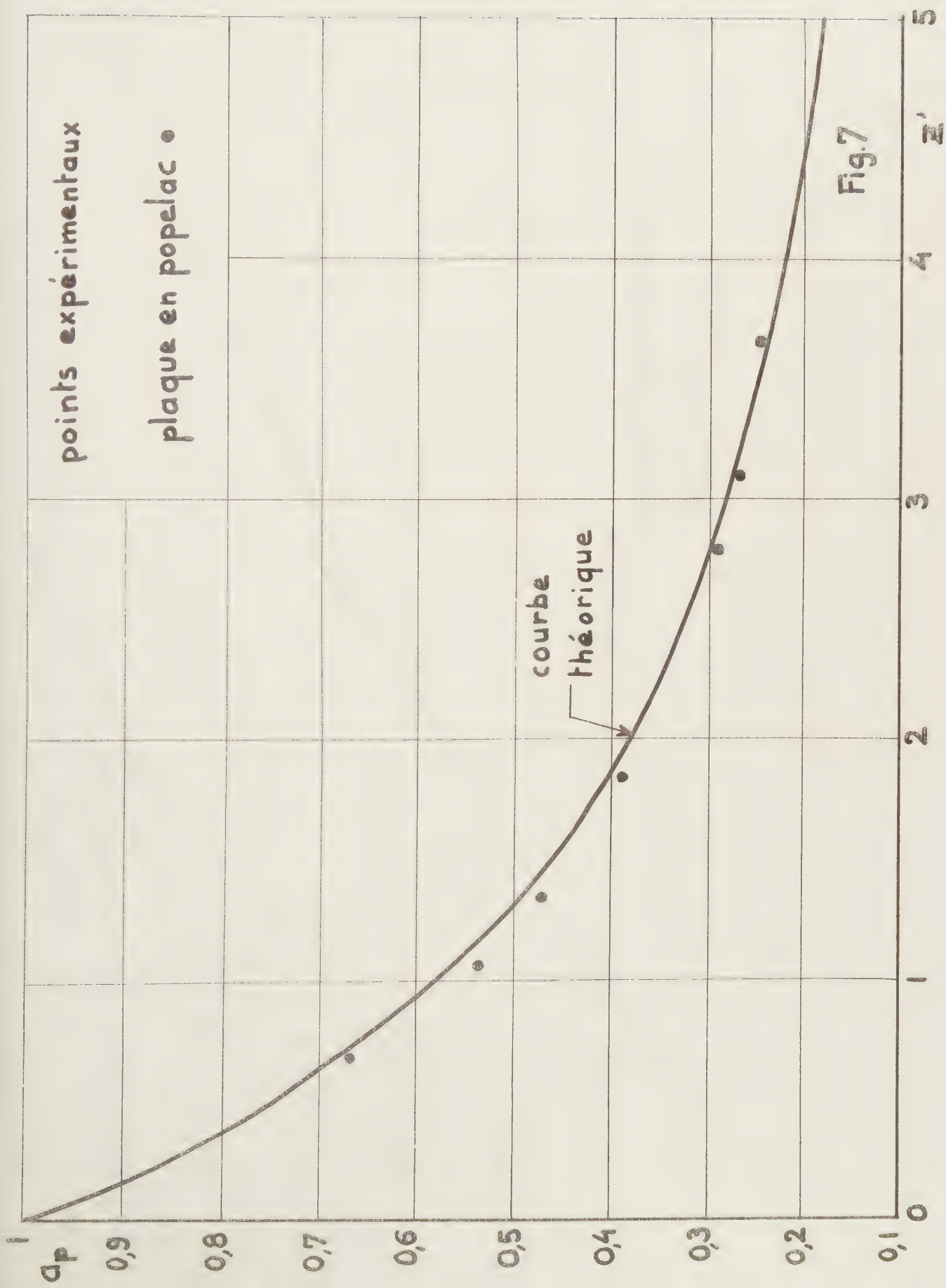


Fig. 6



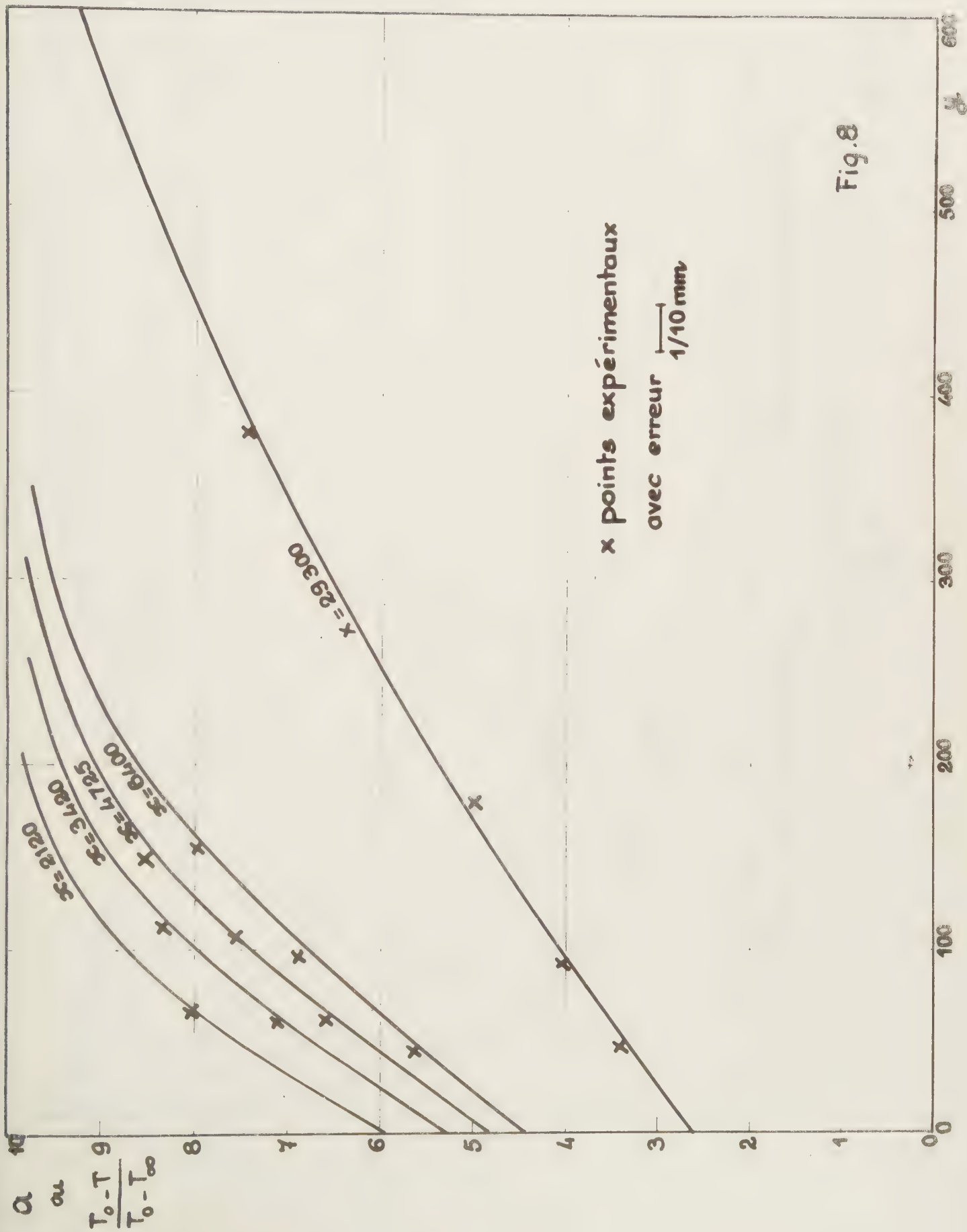


Fig.8

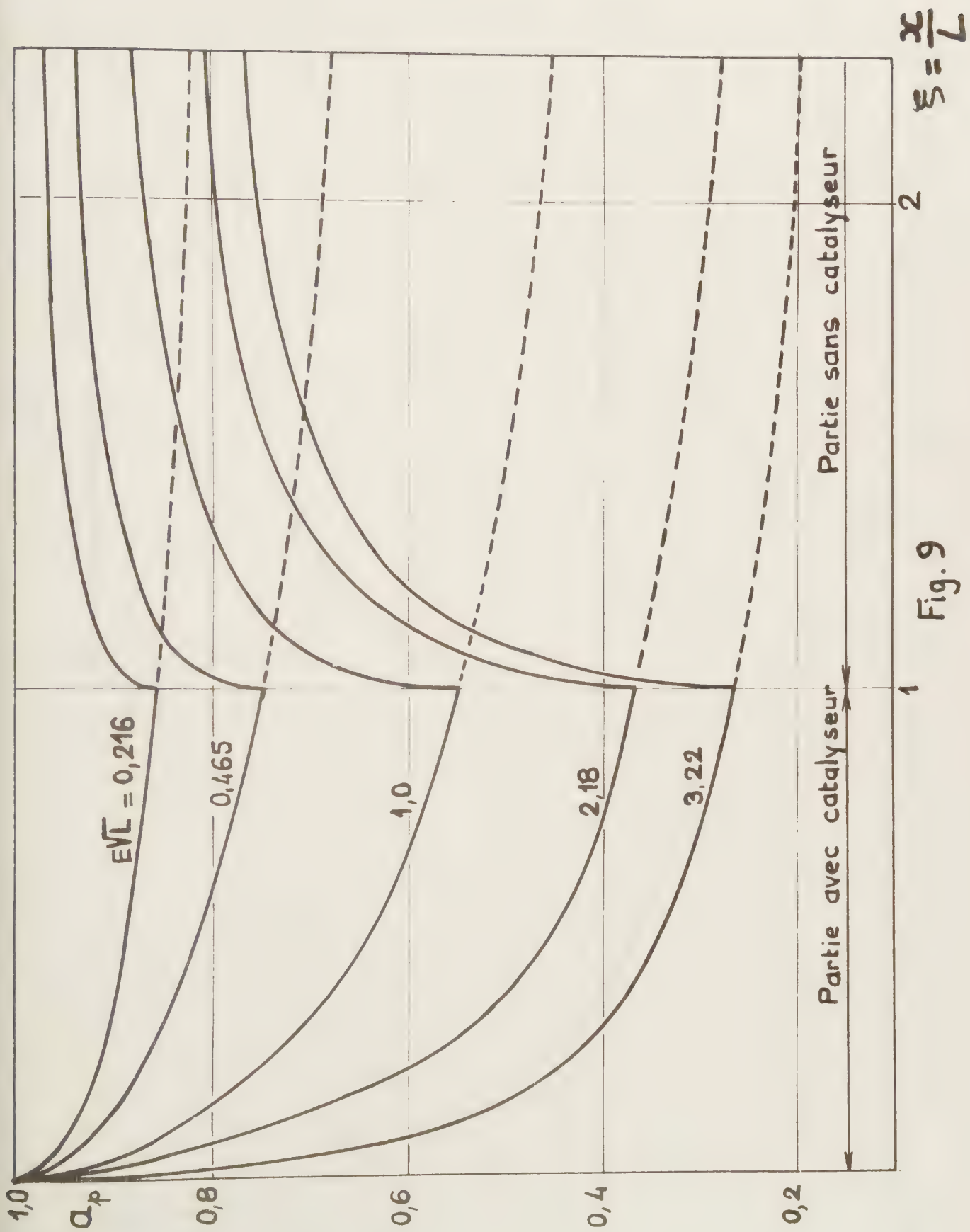
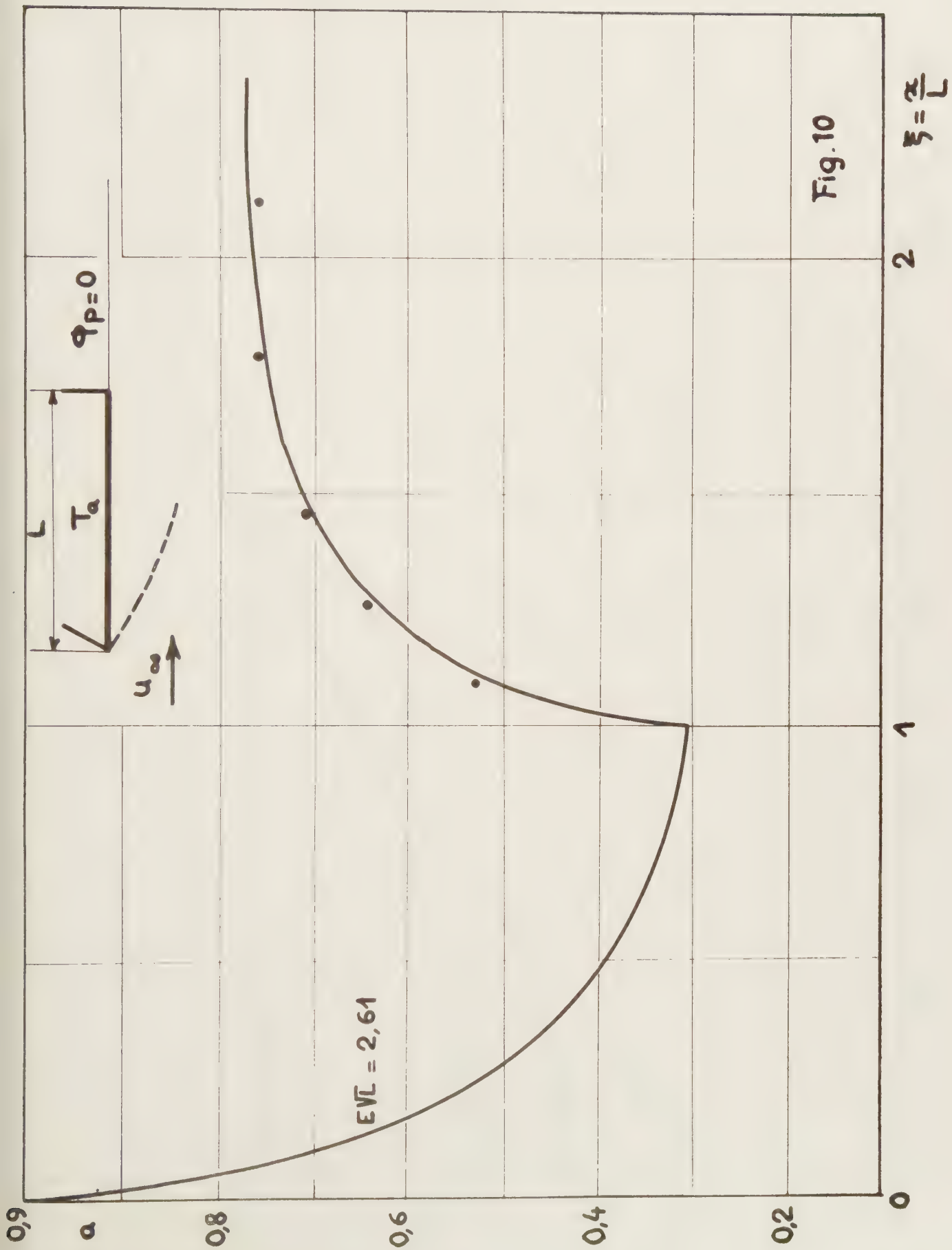


Fig. 9



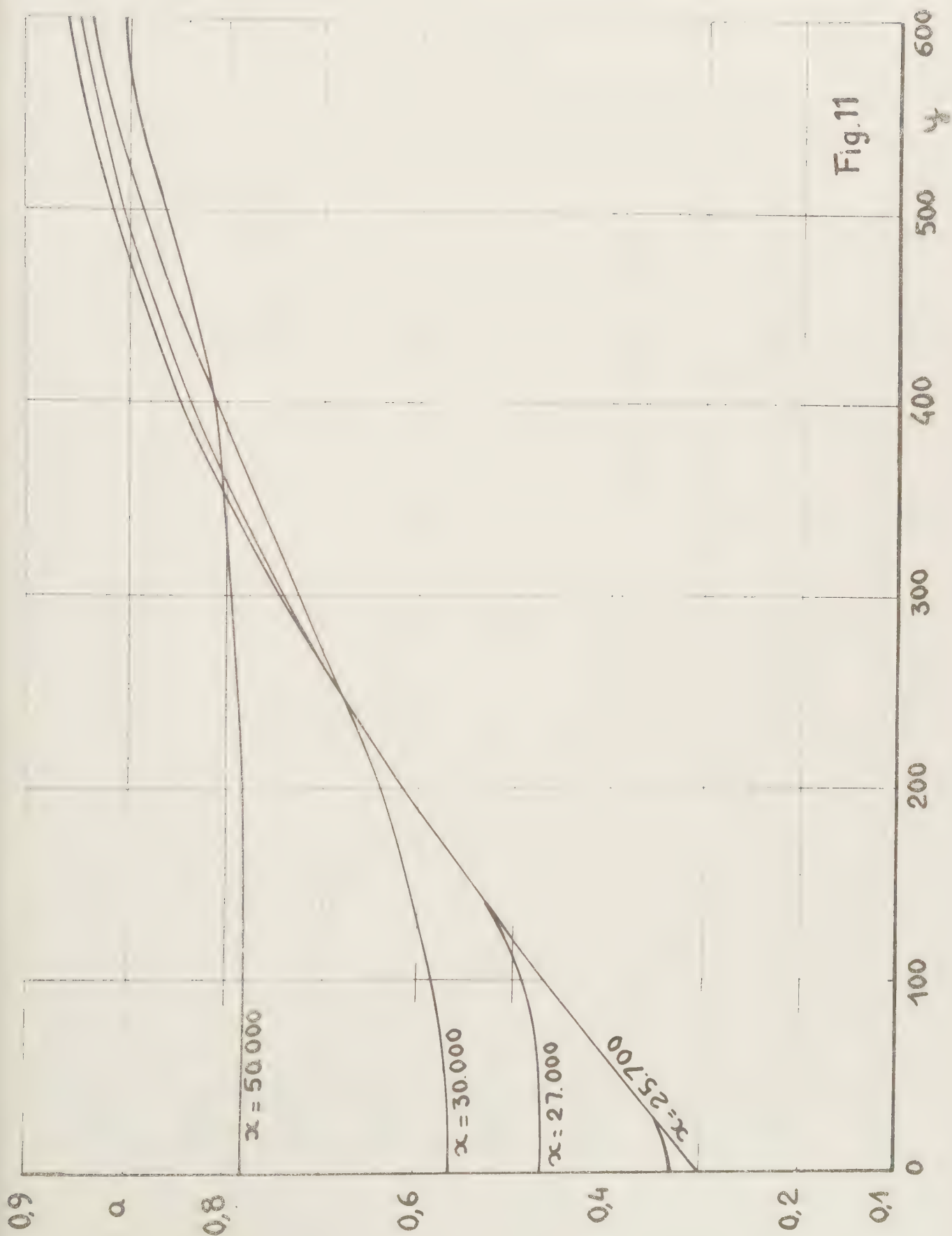


Fig.11

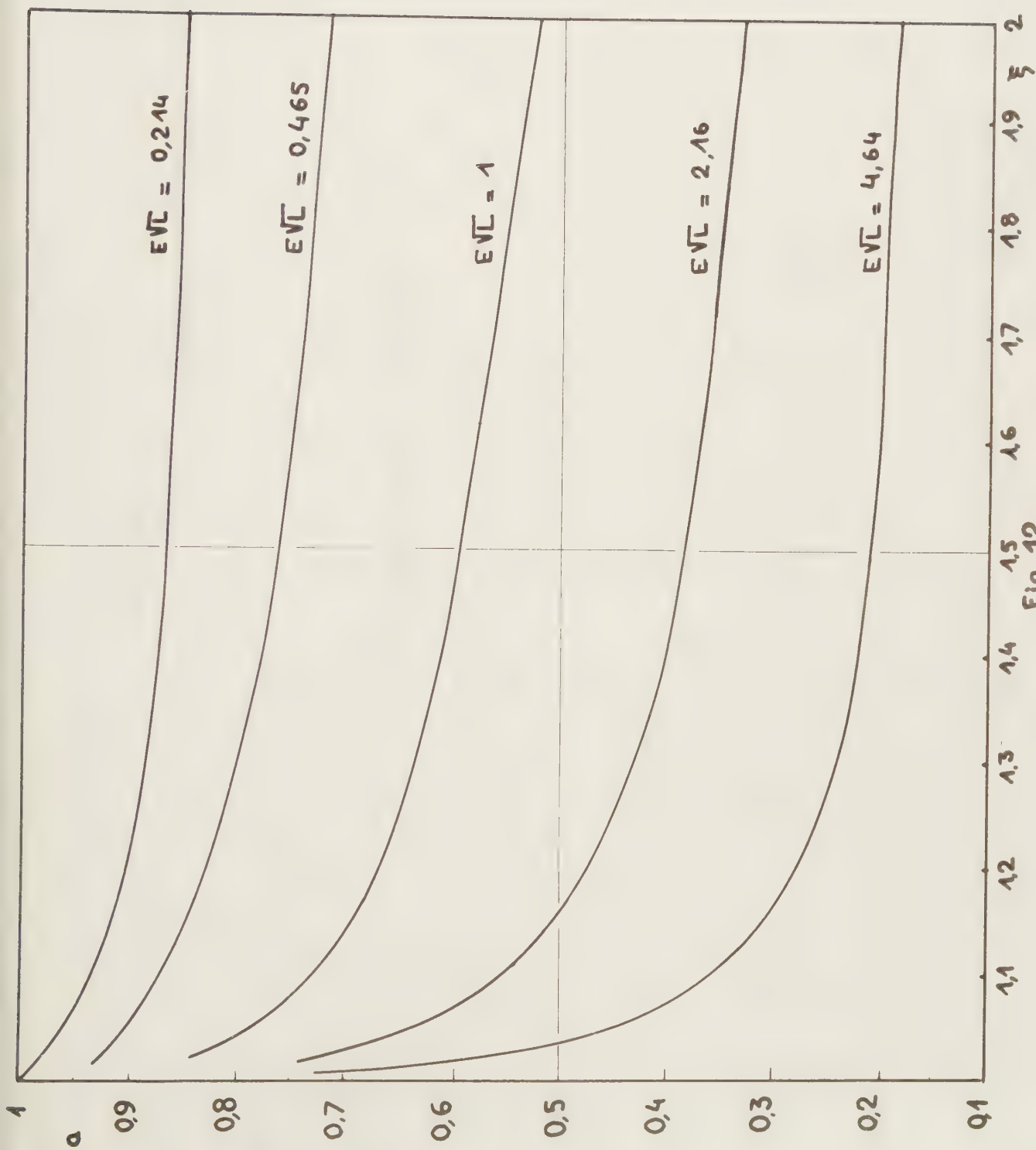


Fig. 12

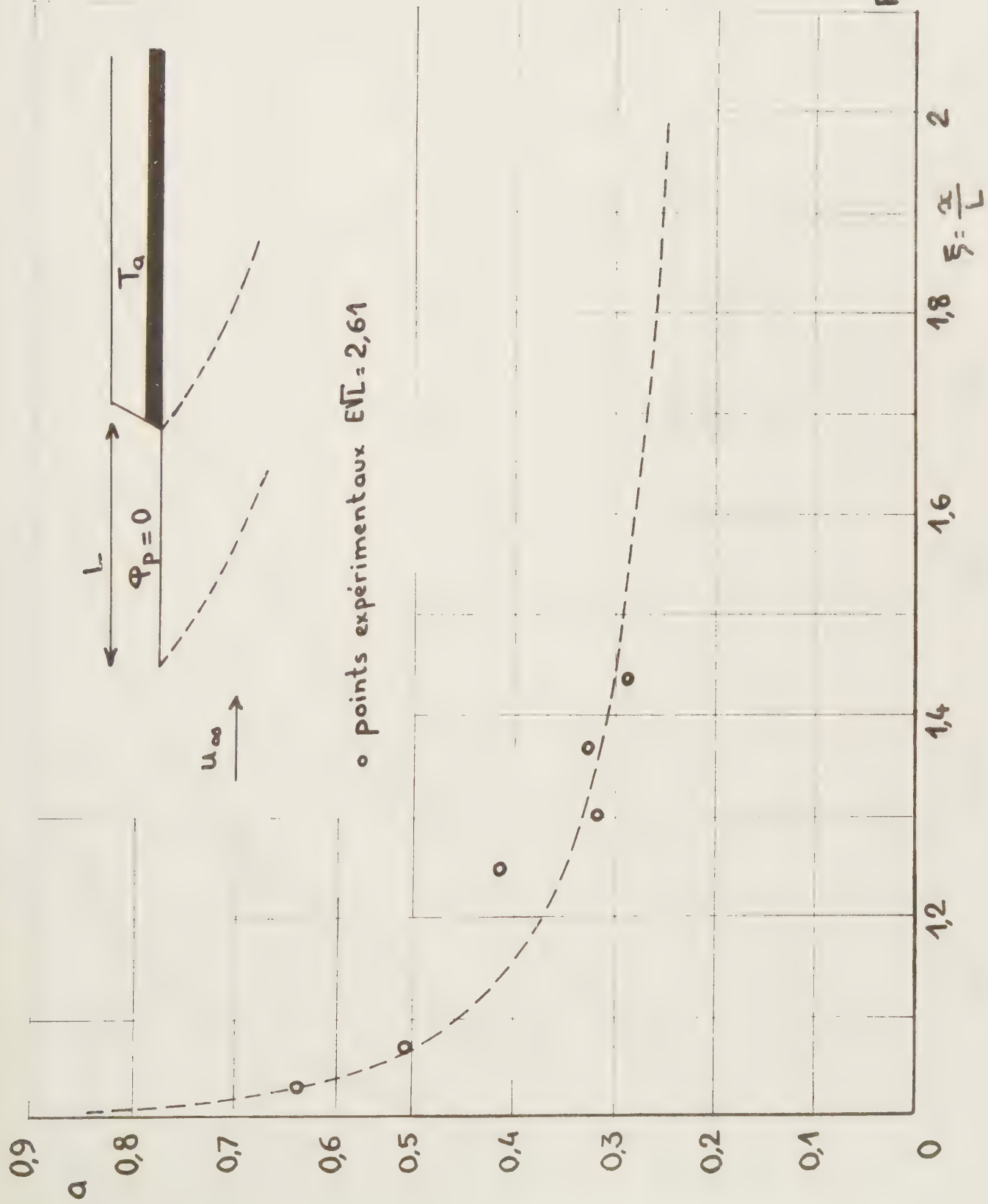


Fig. 13

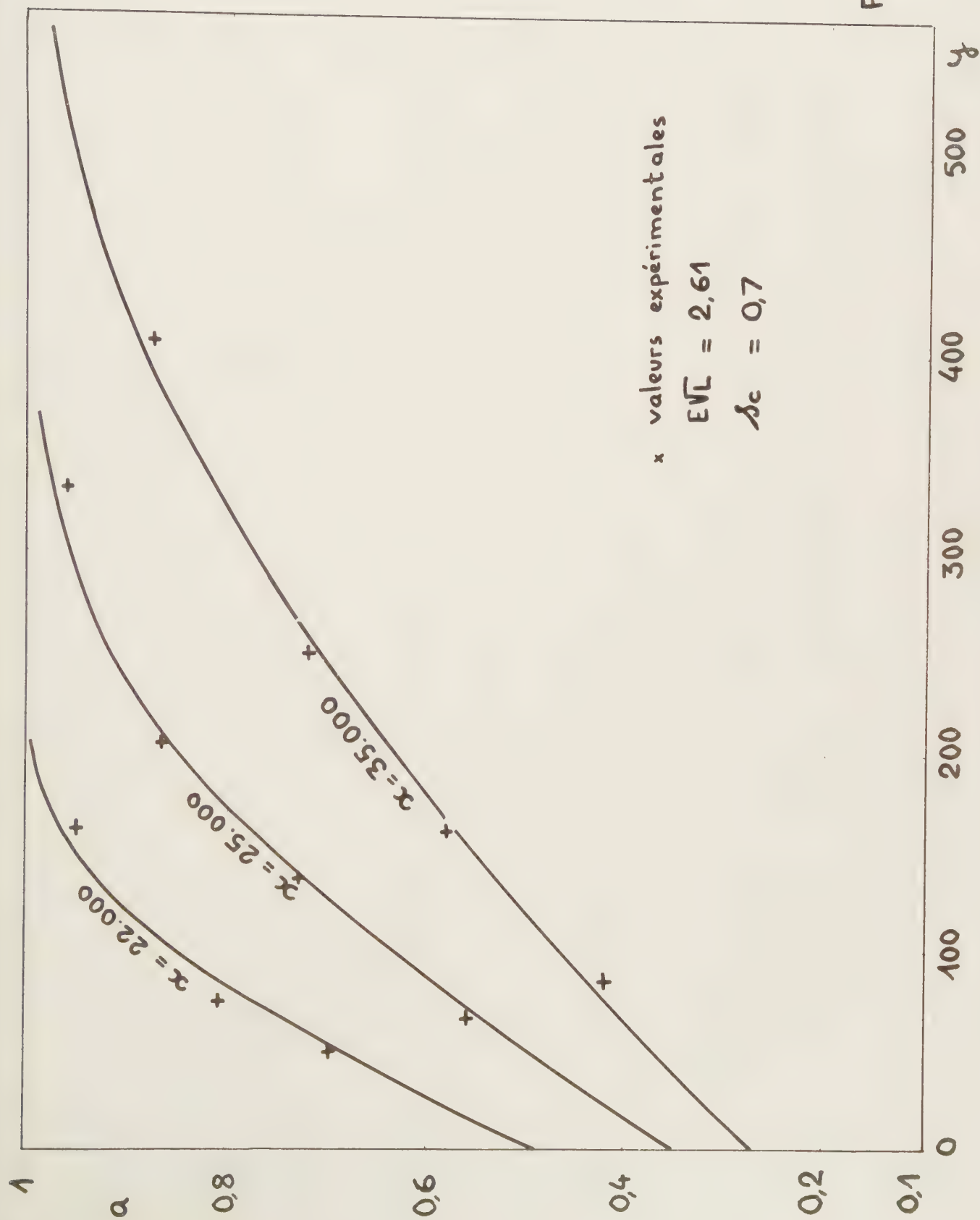


Fig. 14

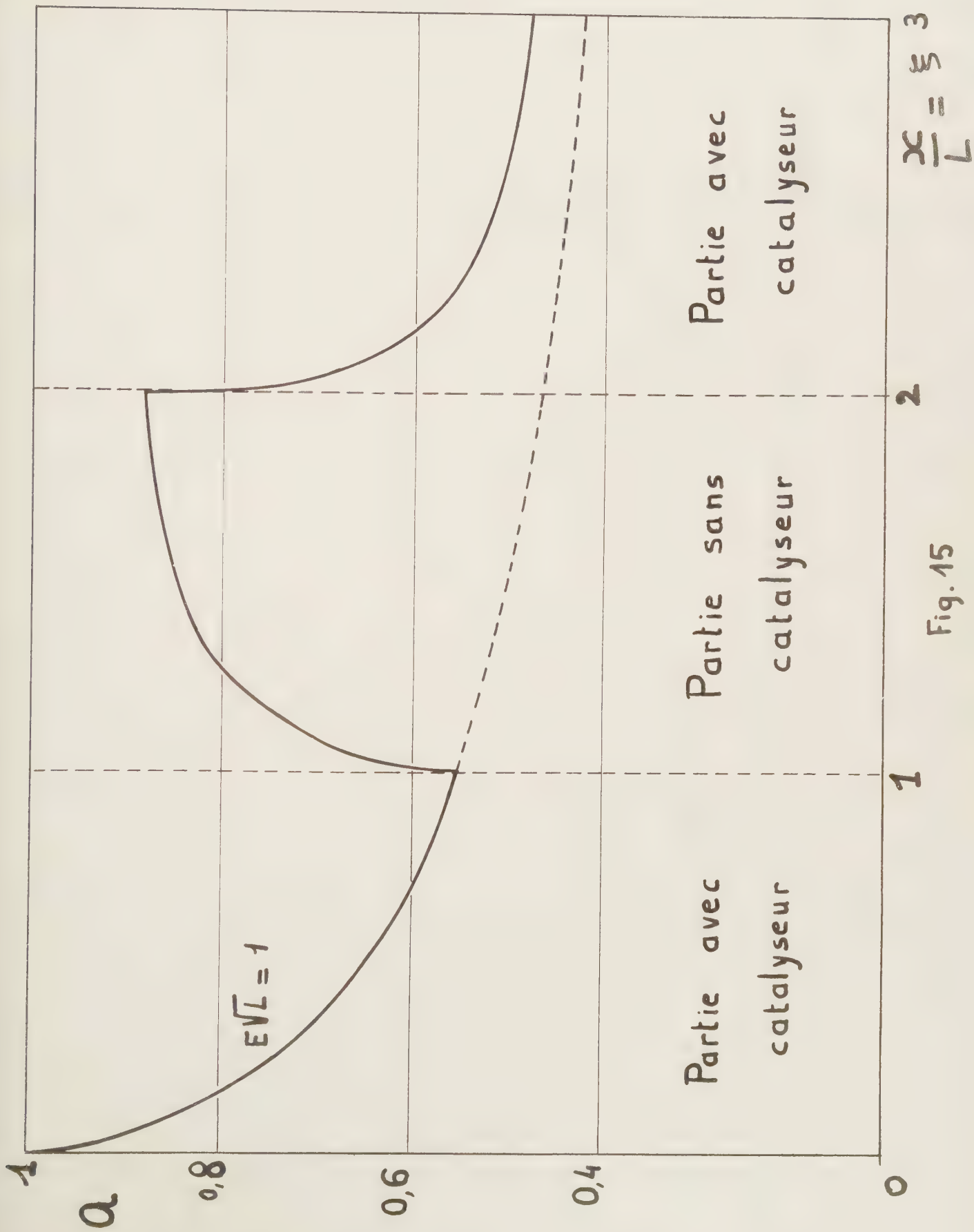


Fig. 15

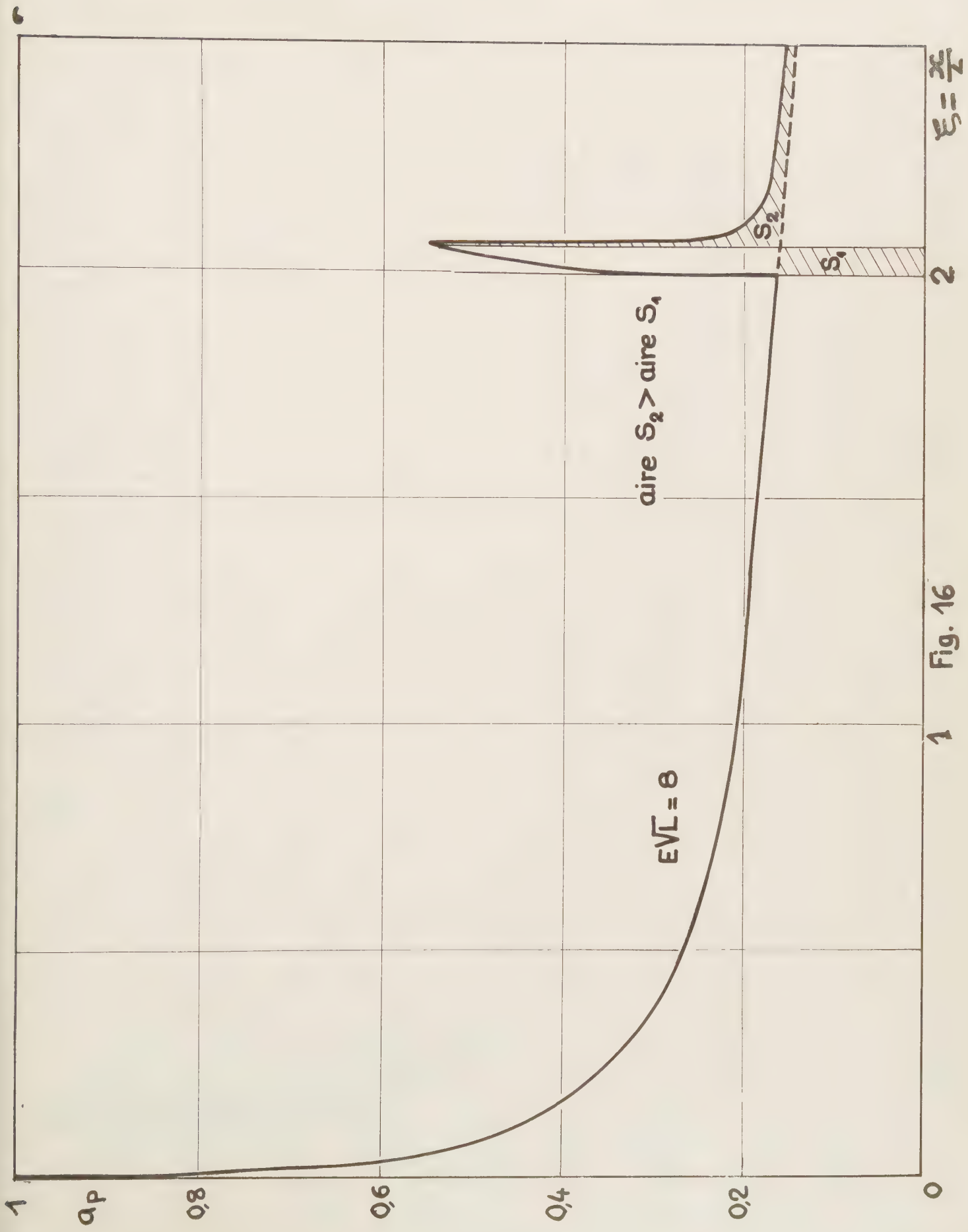


Fig. 16

Distribution des concentrations à la paroi
 en fonction de l'ordre n de la
 réaction

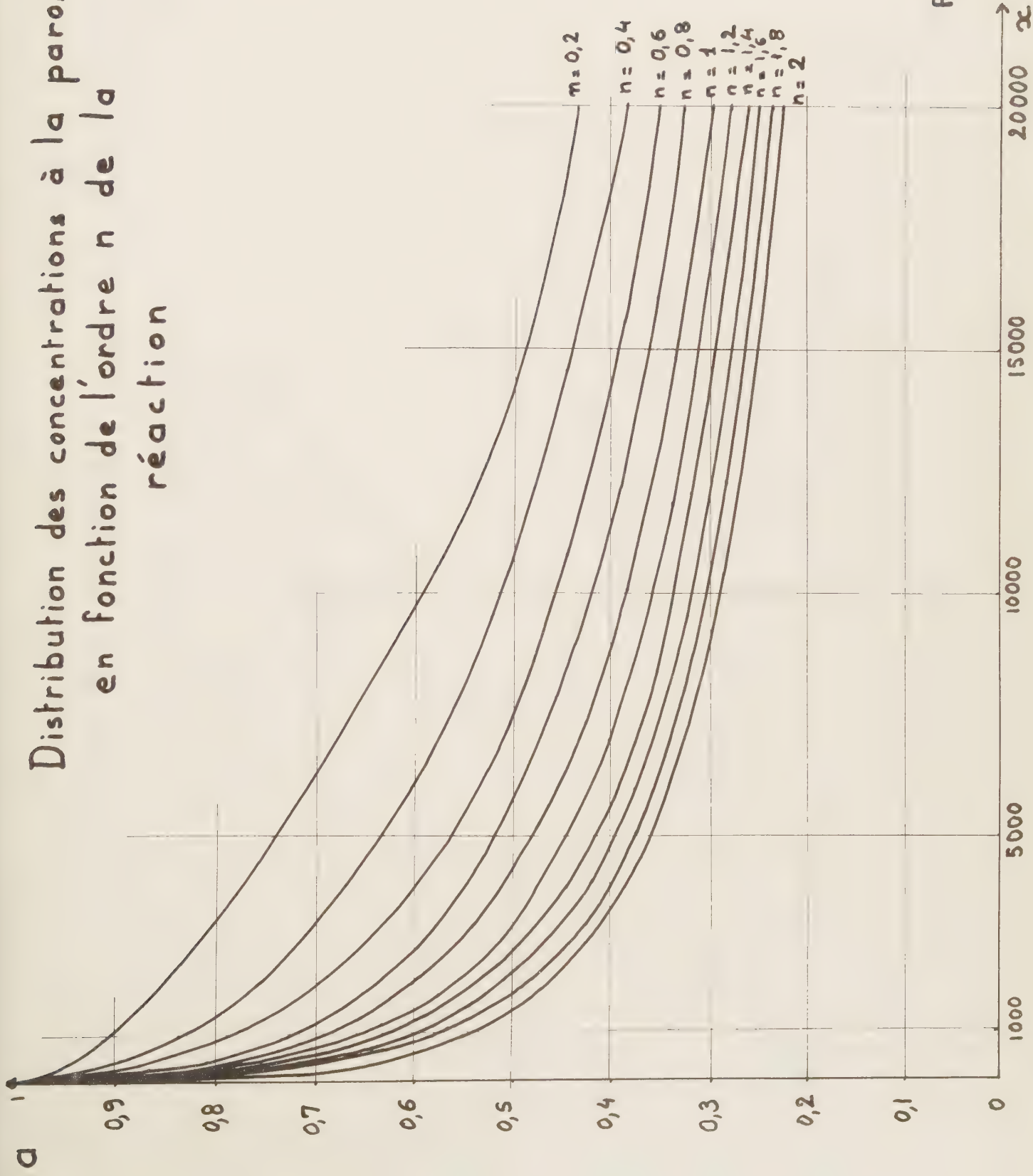


Fig. 17

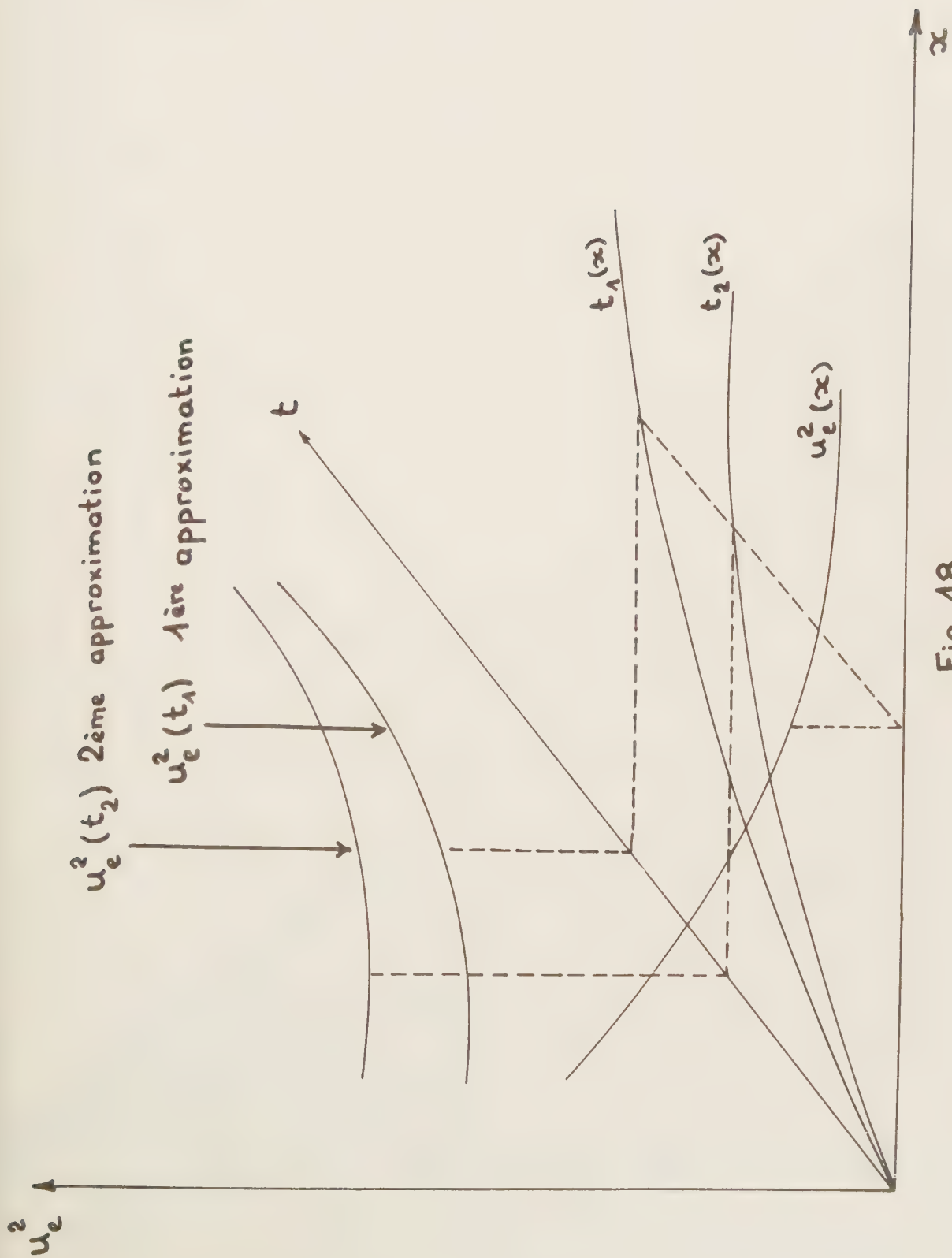


Fig. 18

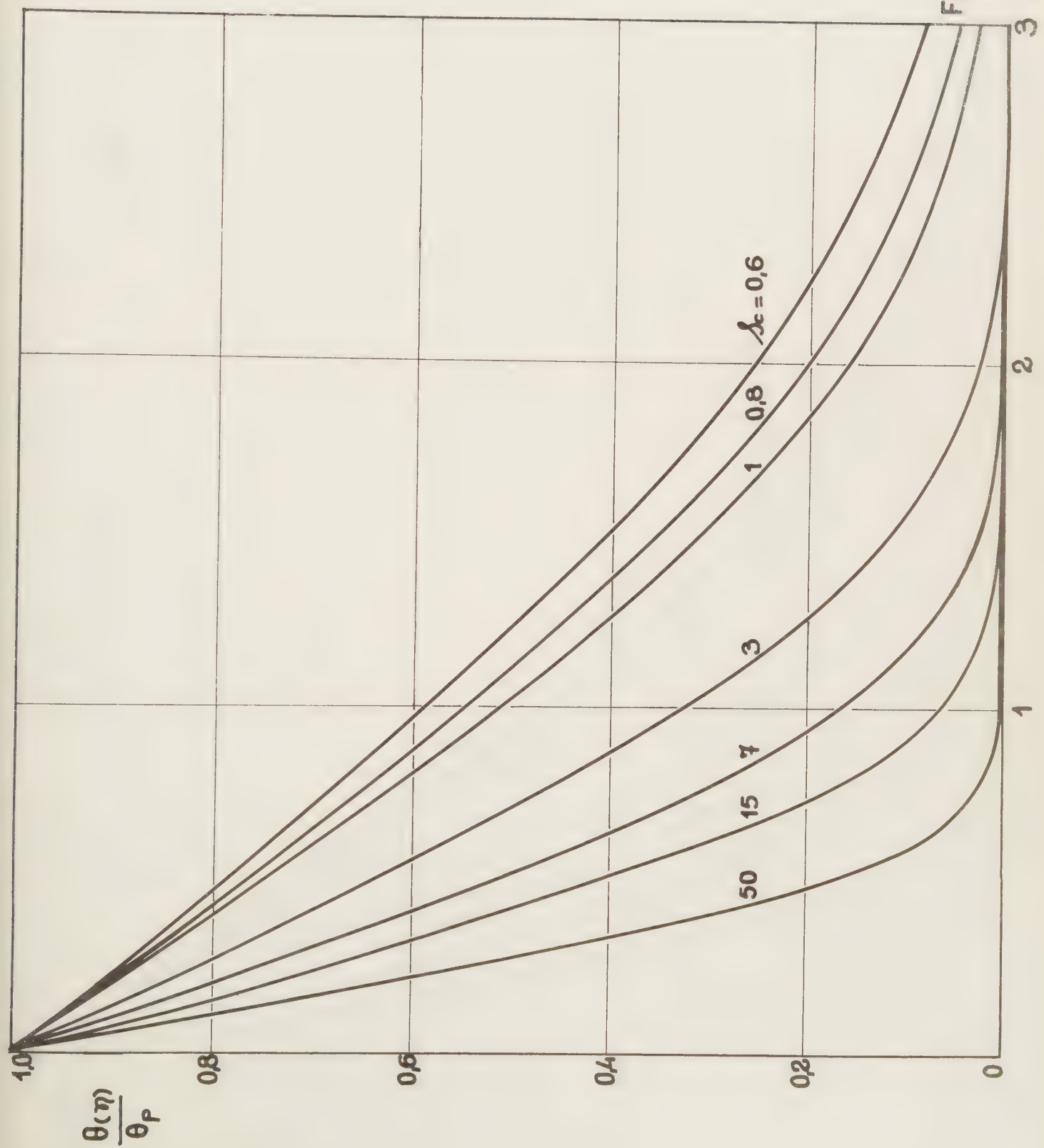


Fig. 19

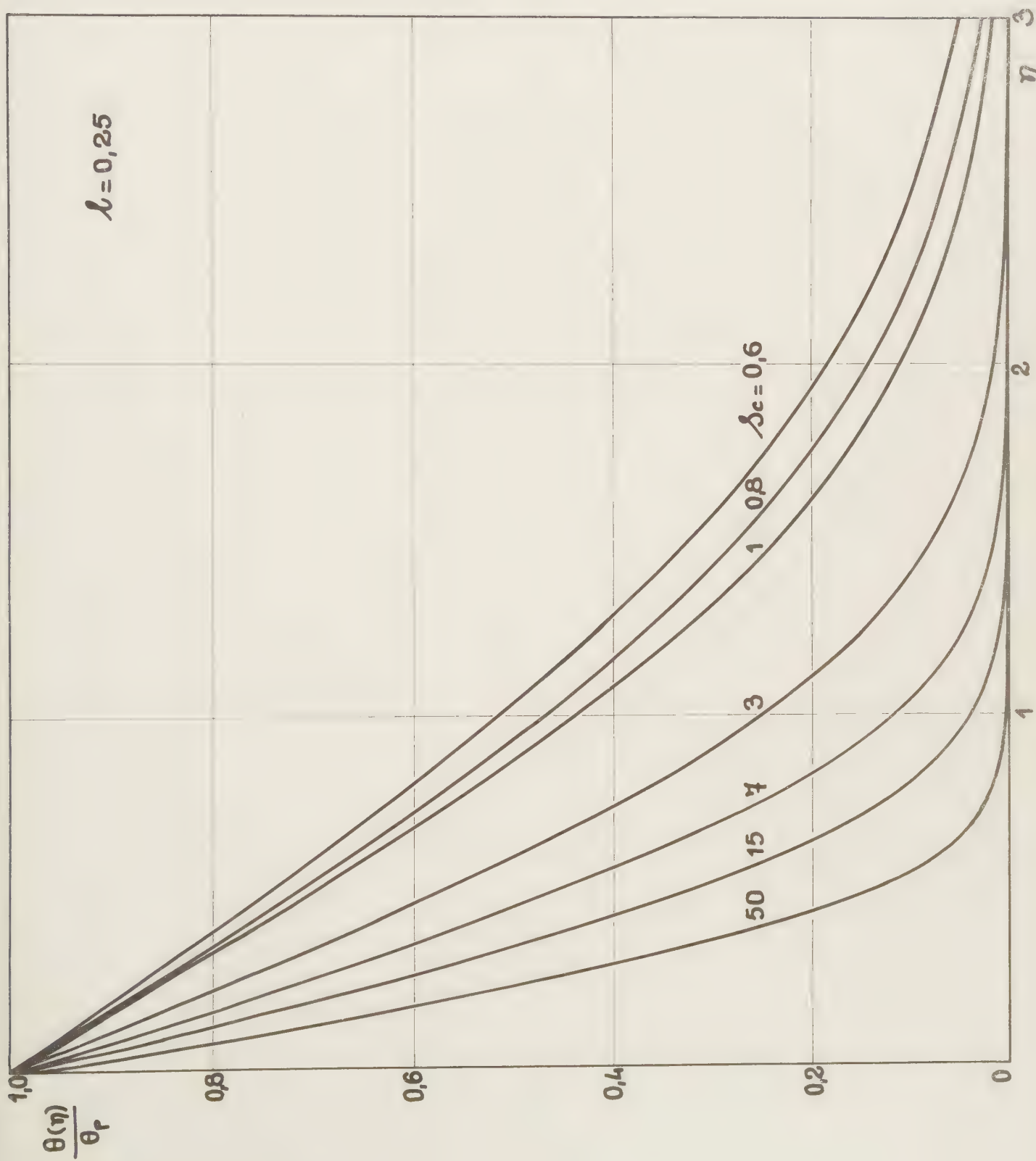


Fig. 20

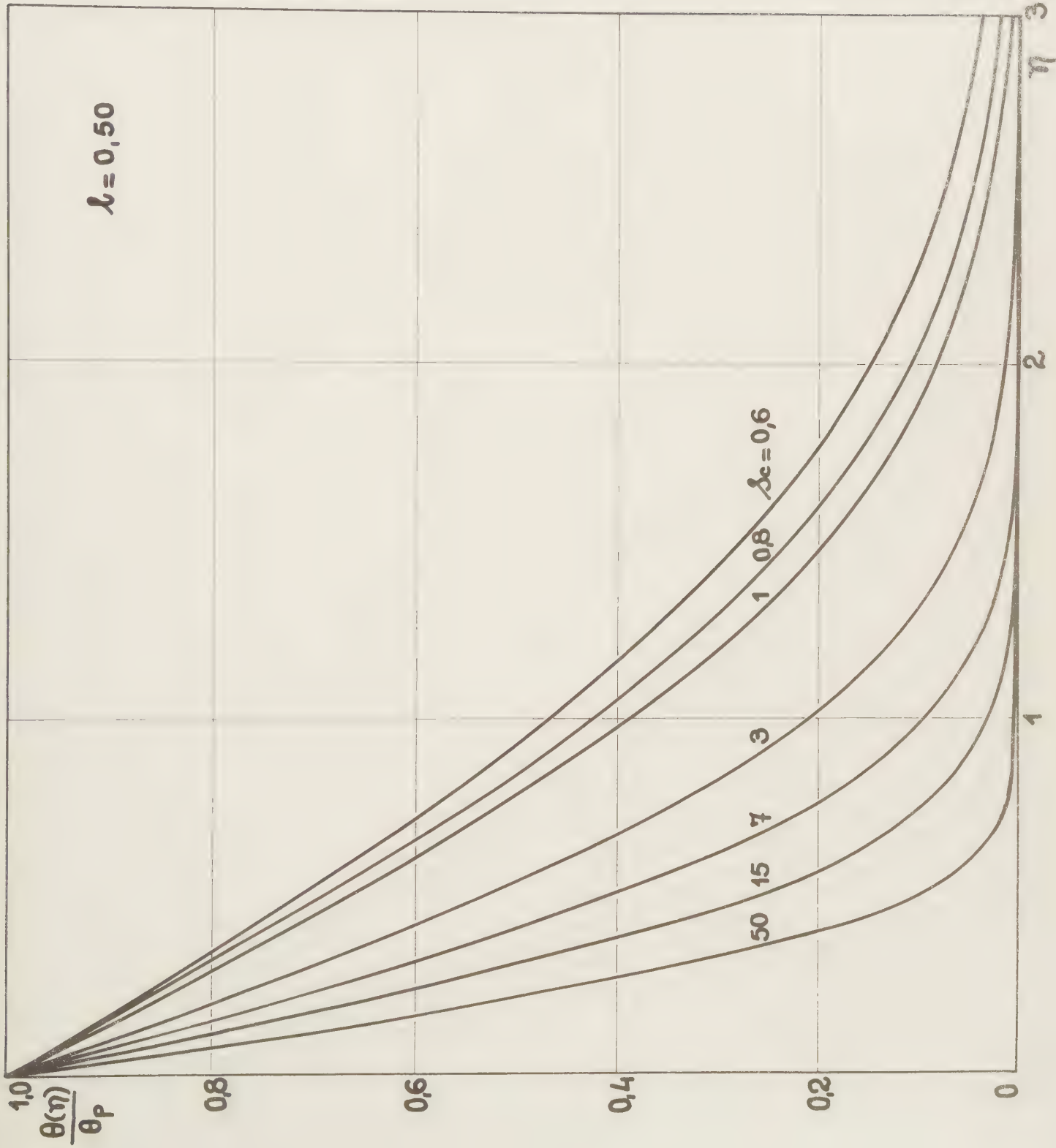


Fig. 2.1

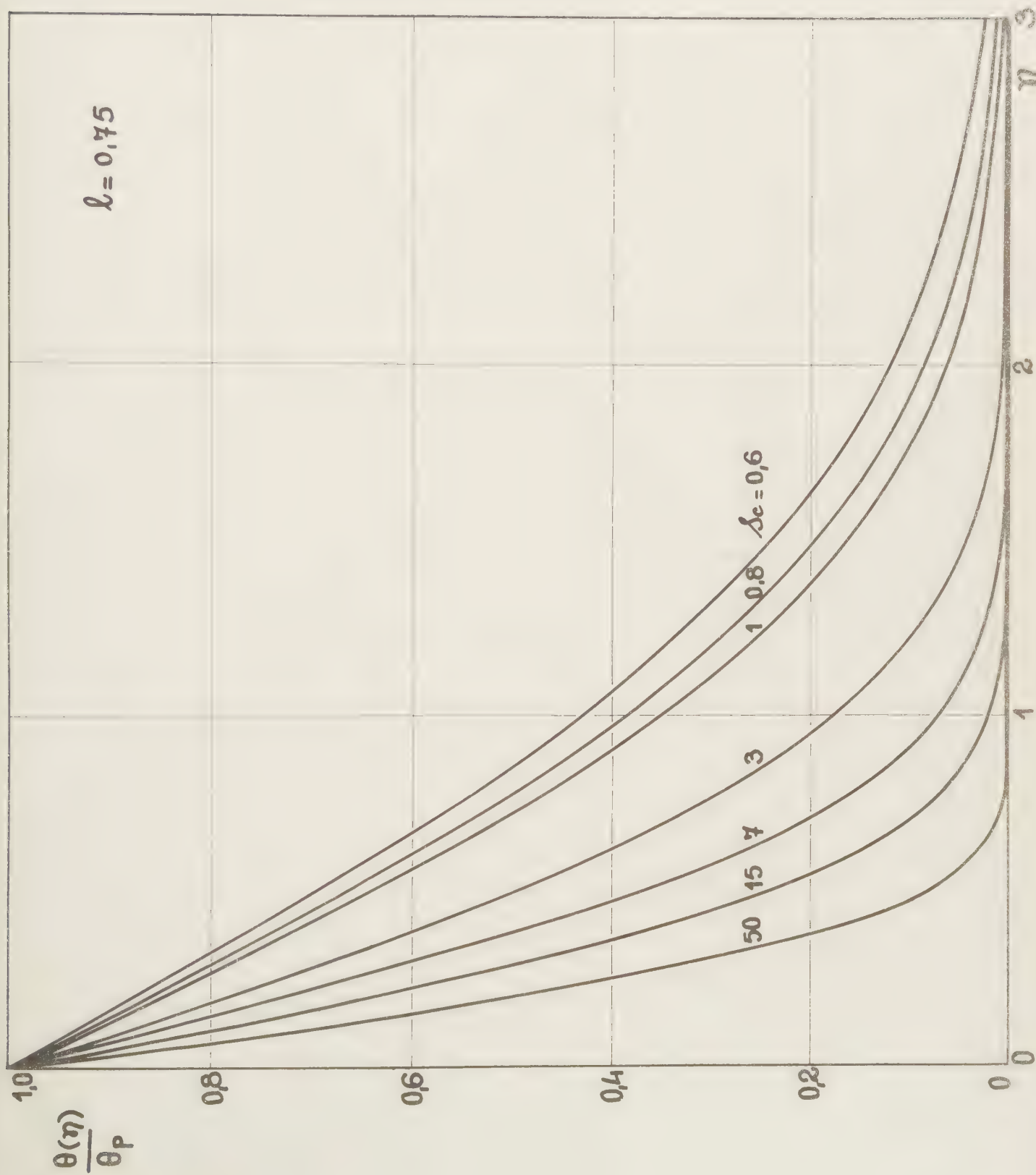


Fig. 22

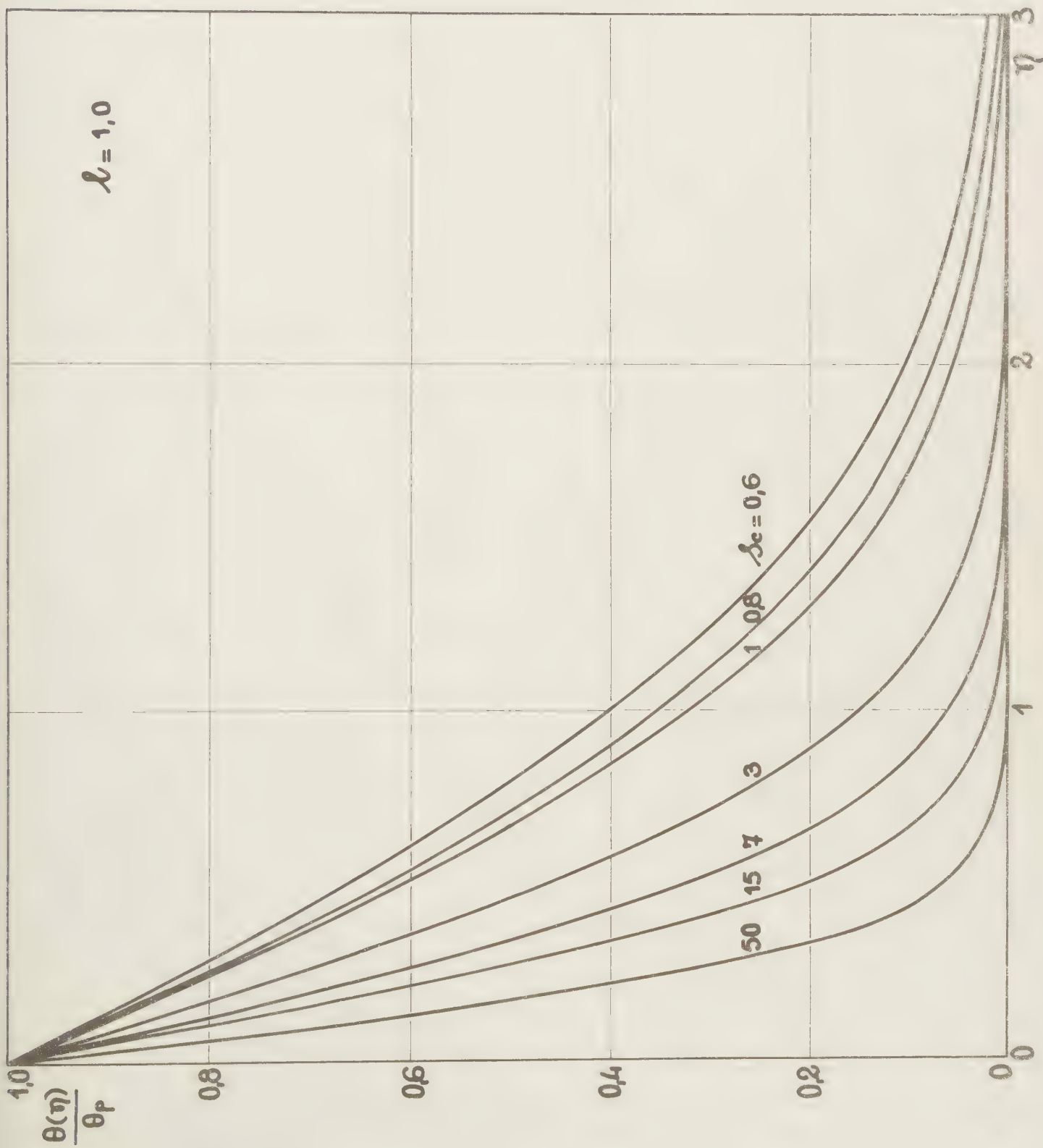


Fig. 23

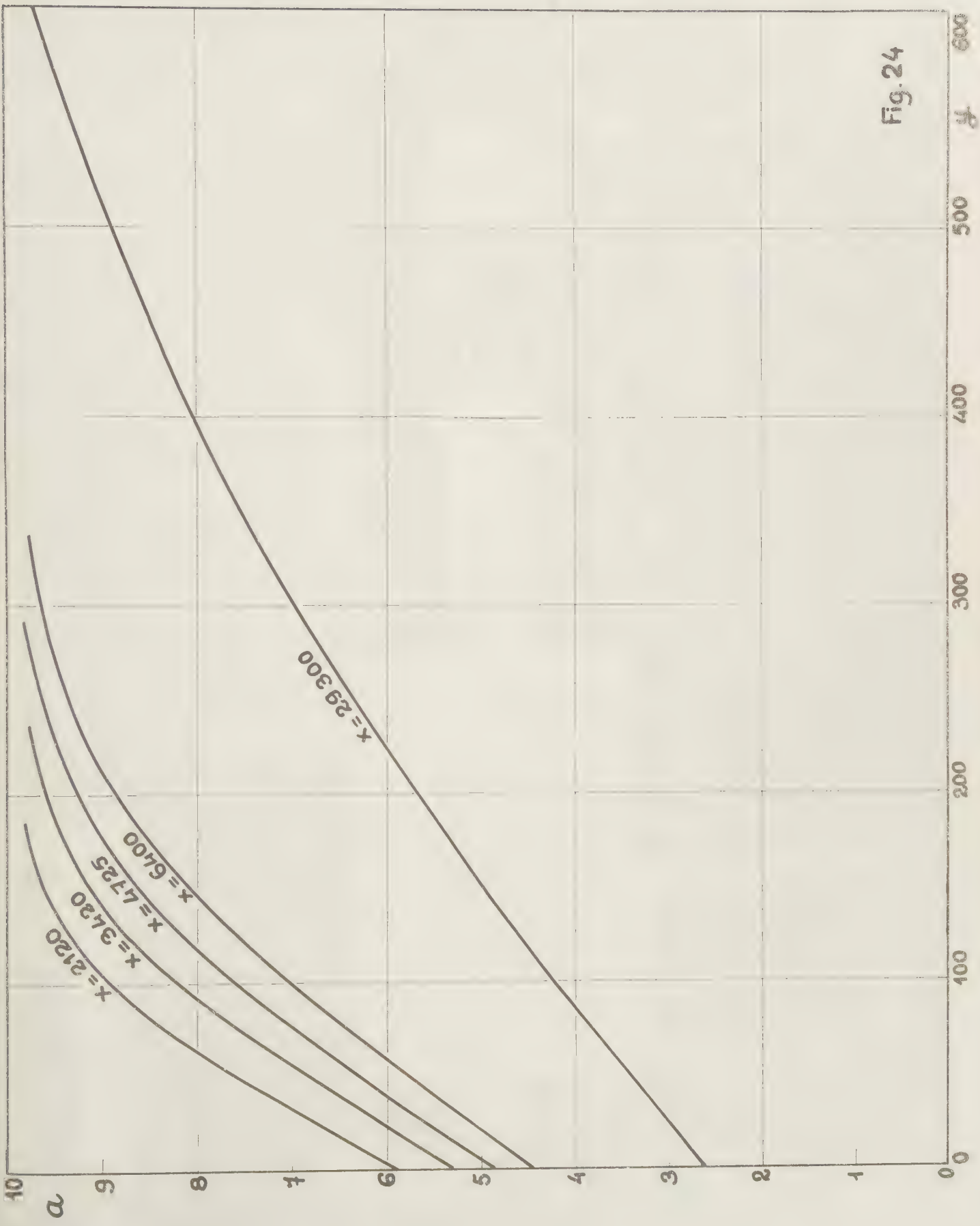


Fig. 24



FIG. 25

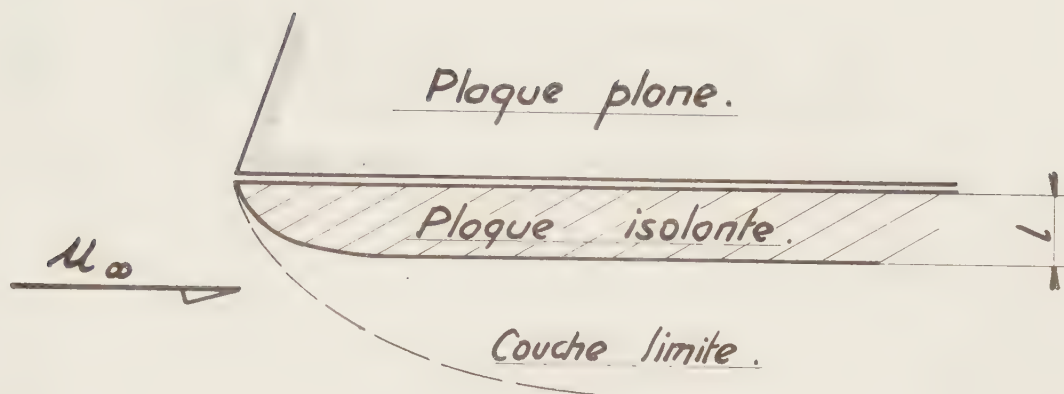


Fig.27

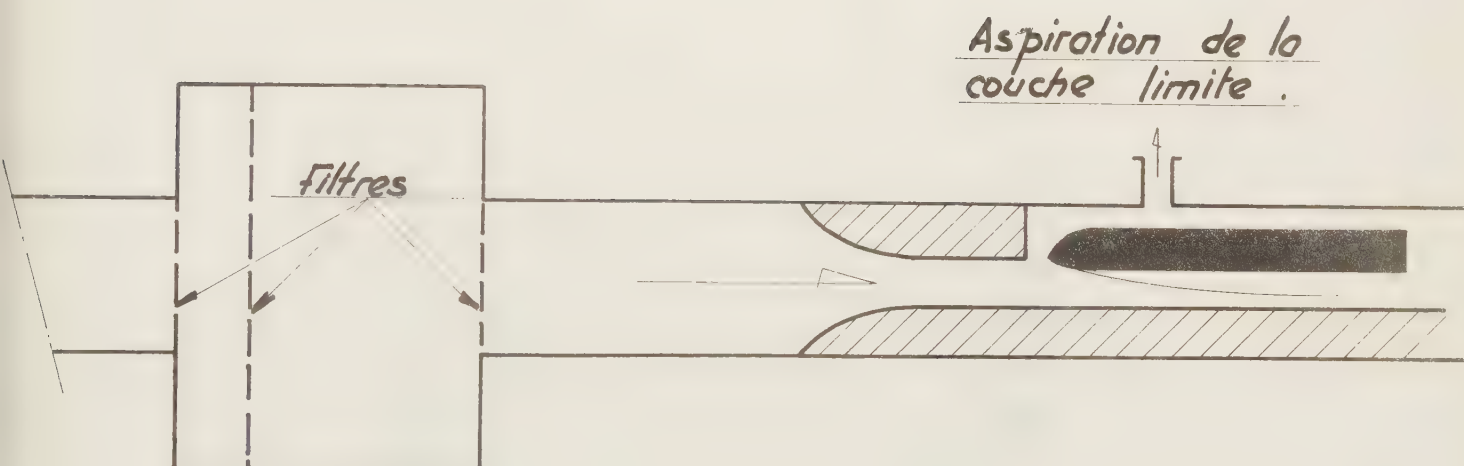
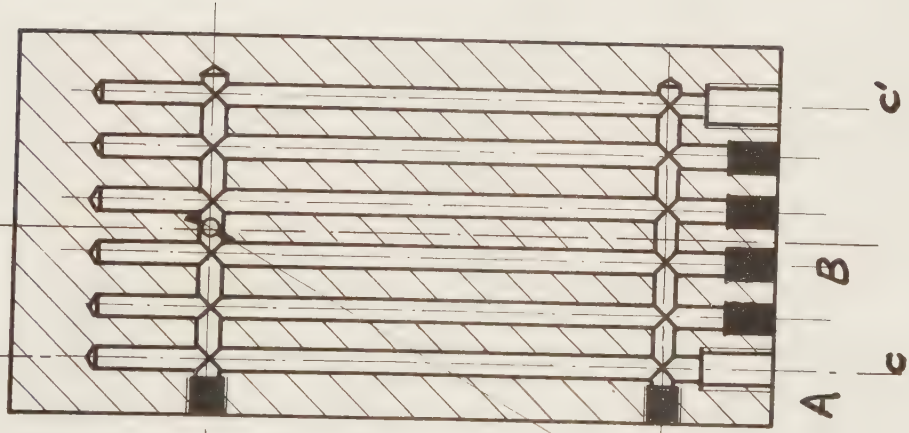


Fig.26

A B



injection de la vapeur

Coupe AA



Coupe BB

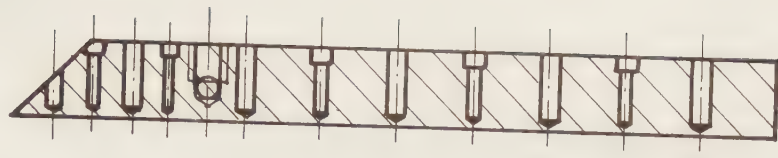


Fig. 28

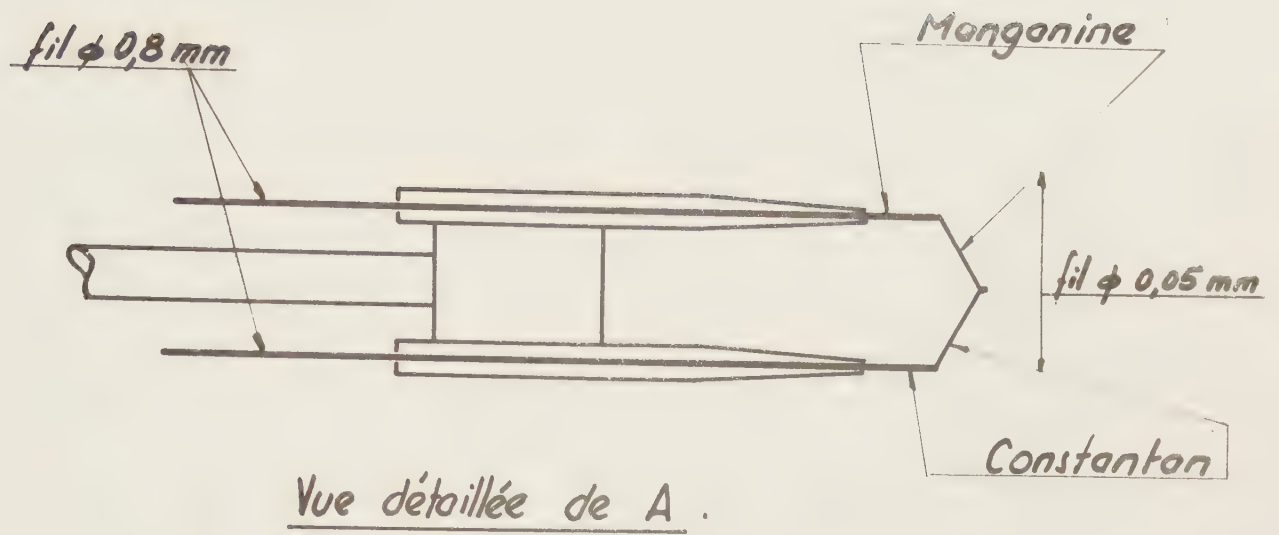


Fig. 29

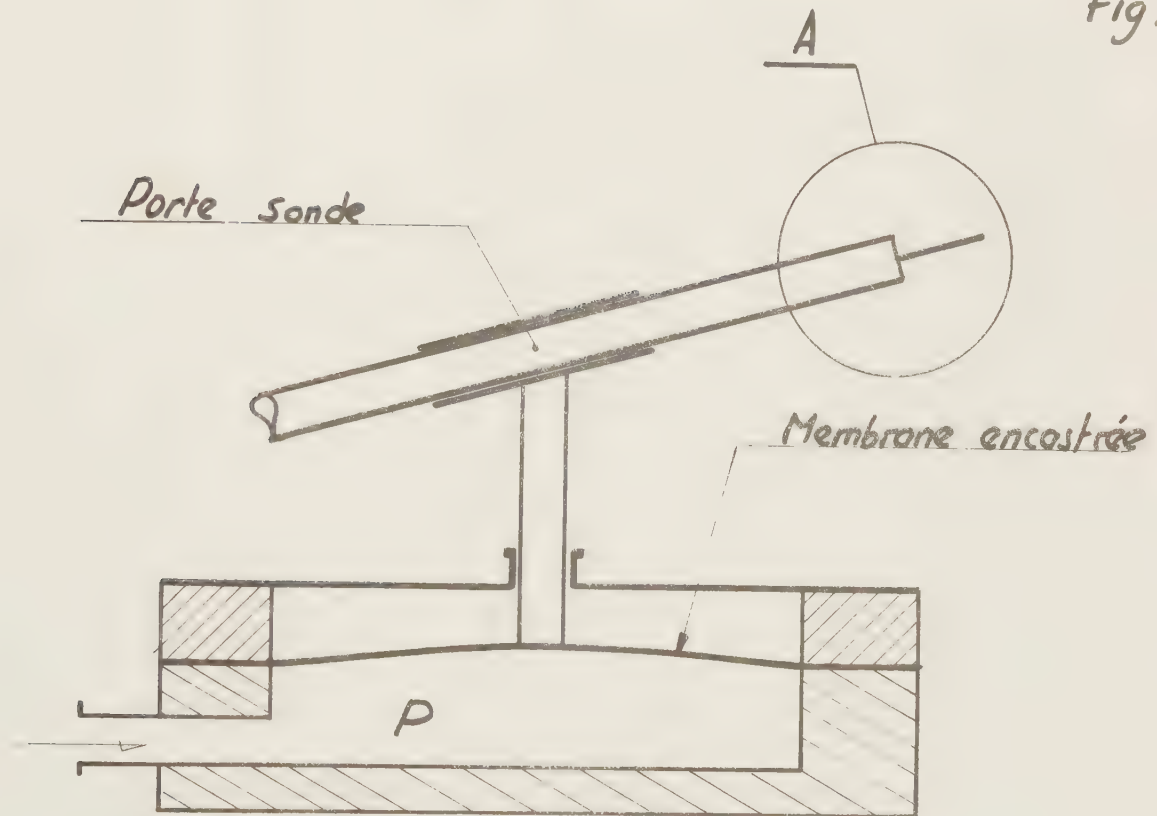


Fig. 30

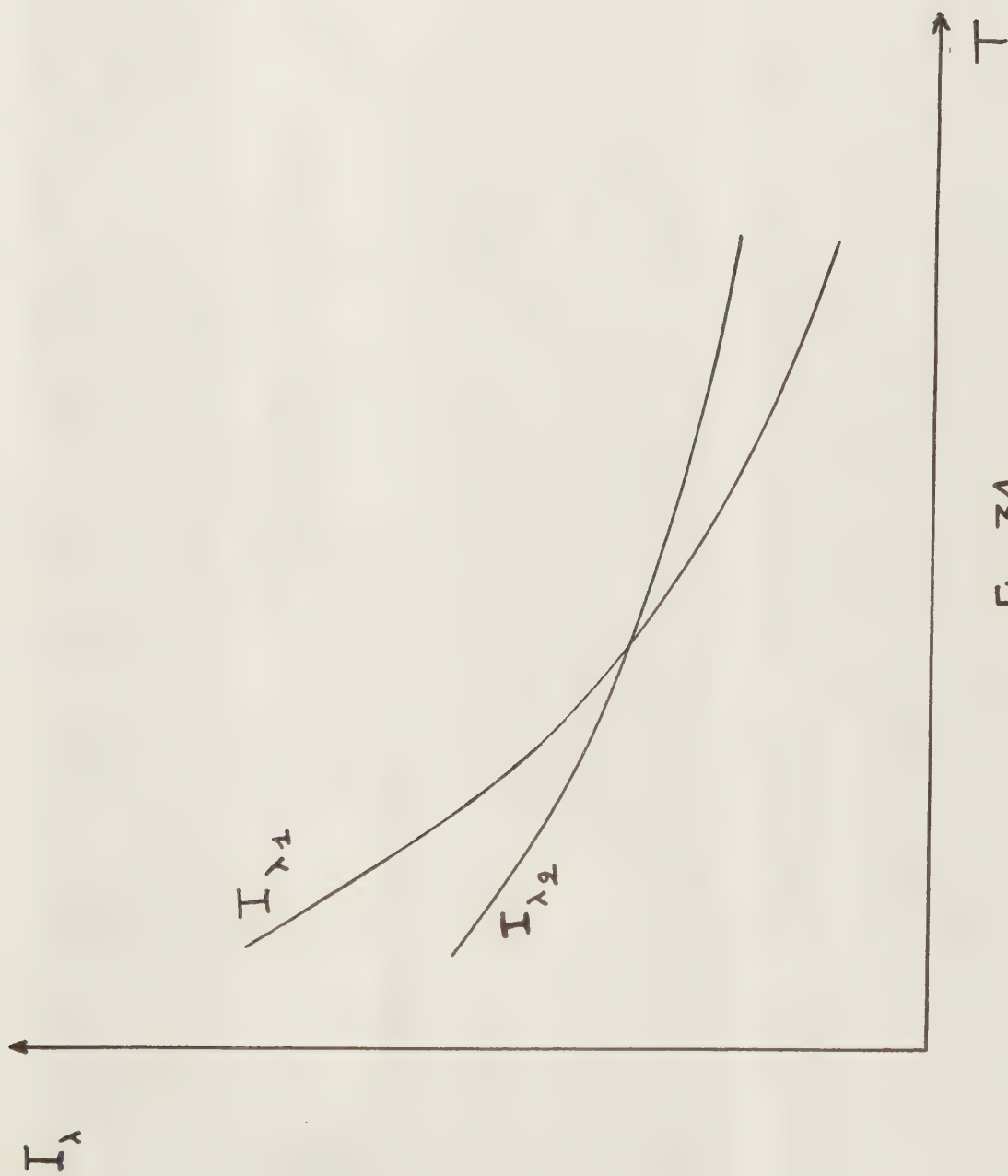


Fig. 31

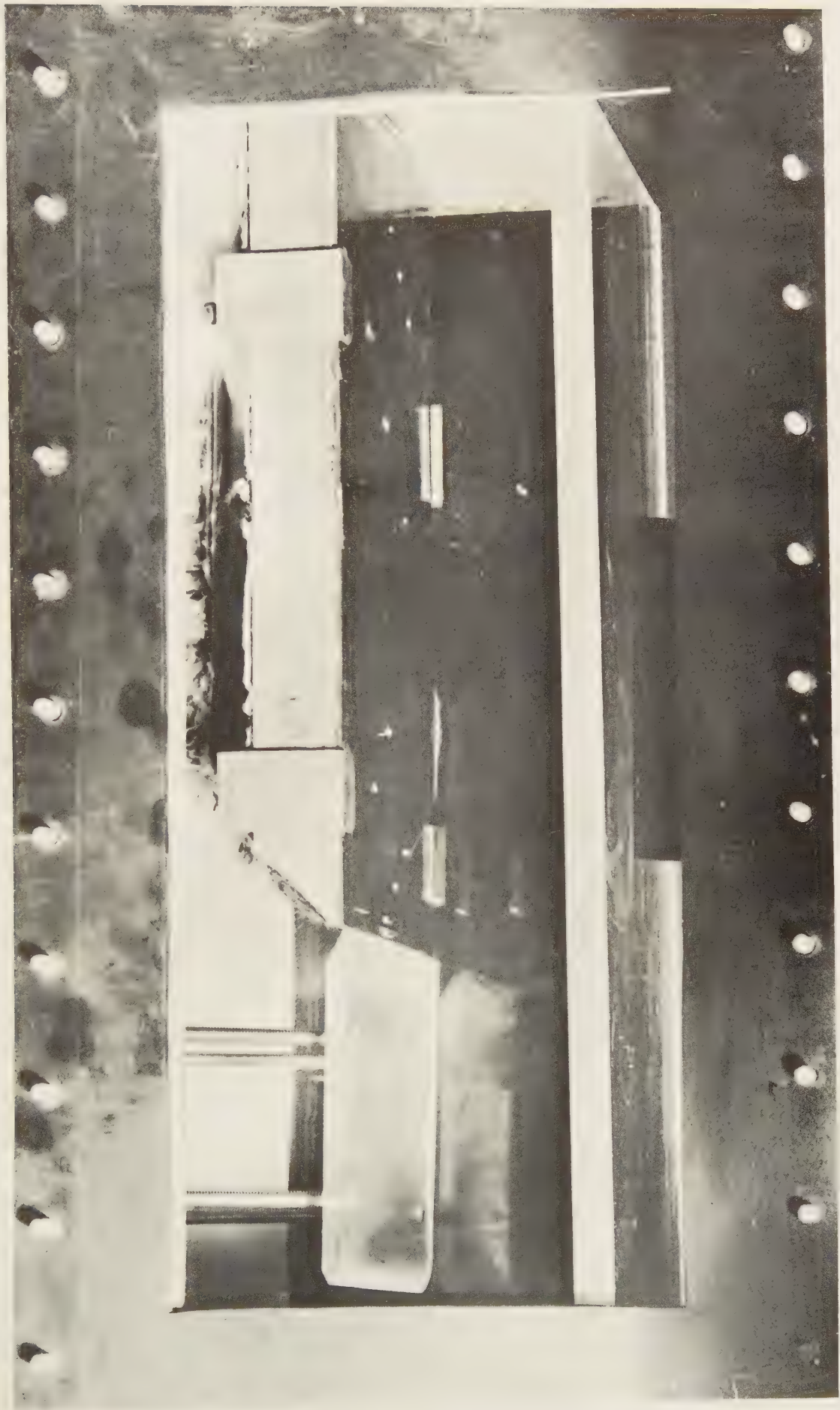


FIG. 32

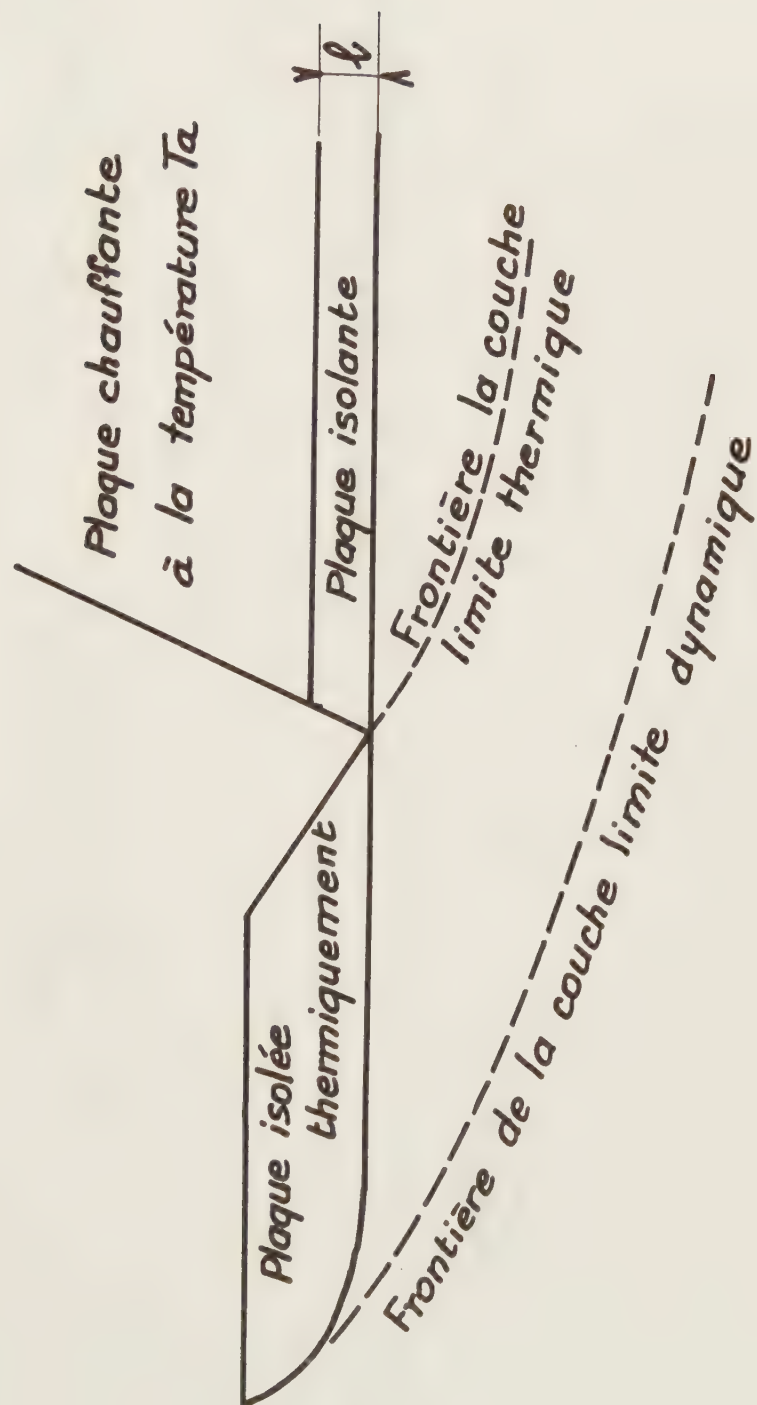


Fig. 33

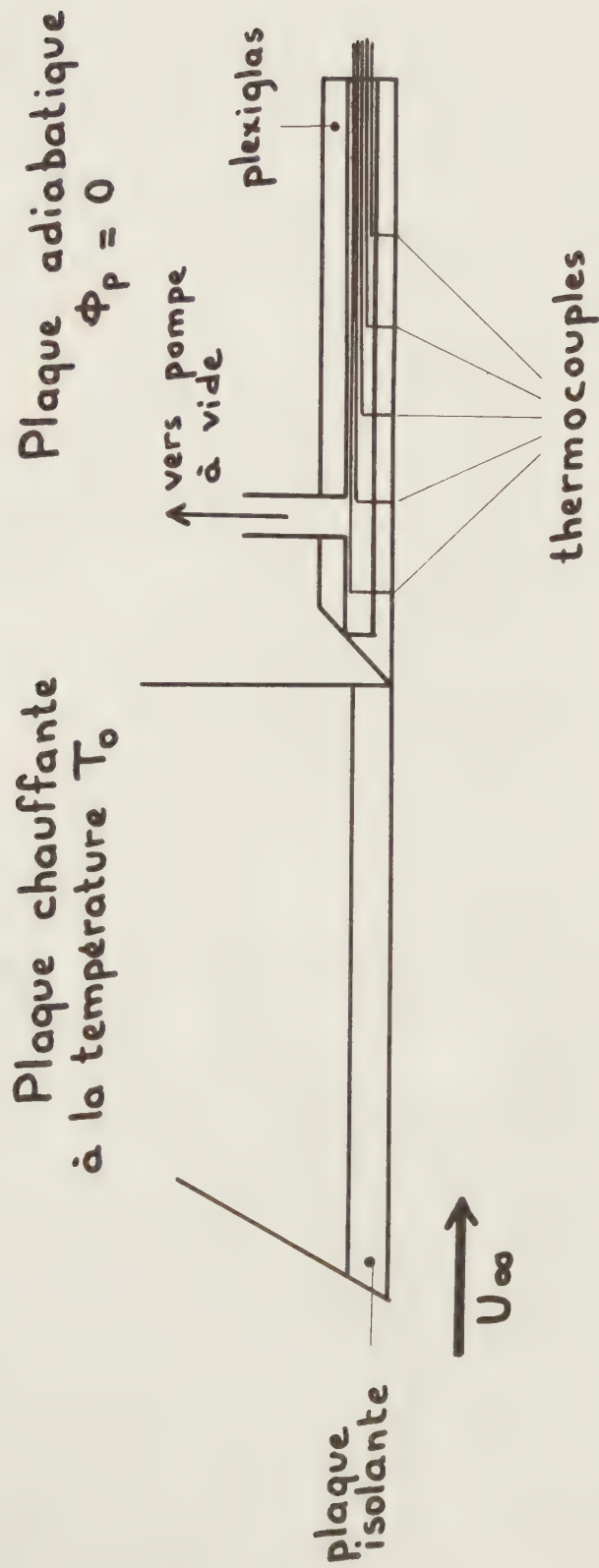


Fig. 34

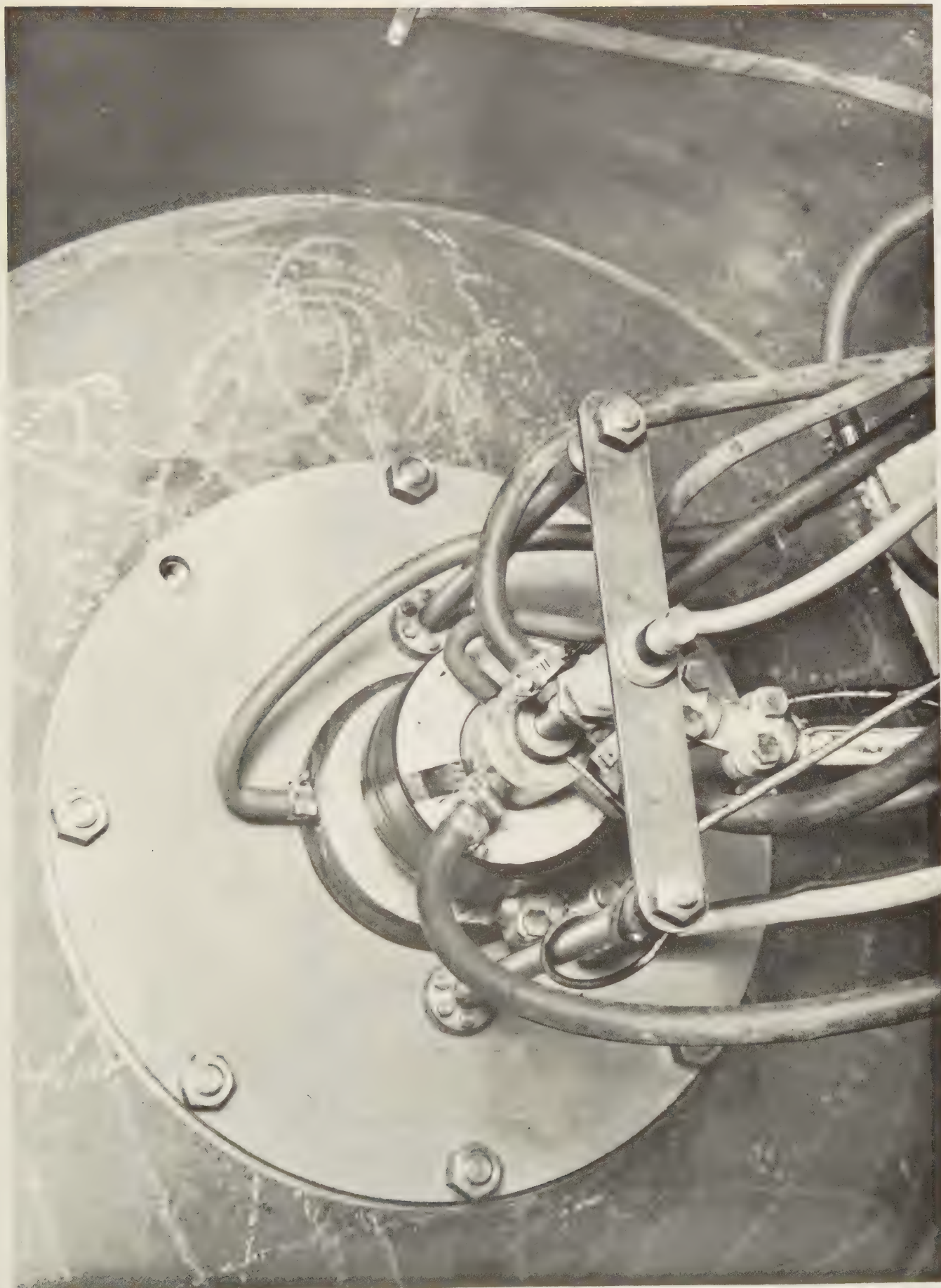


FIG. 35

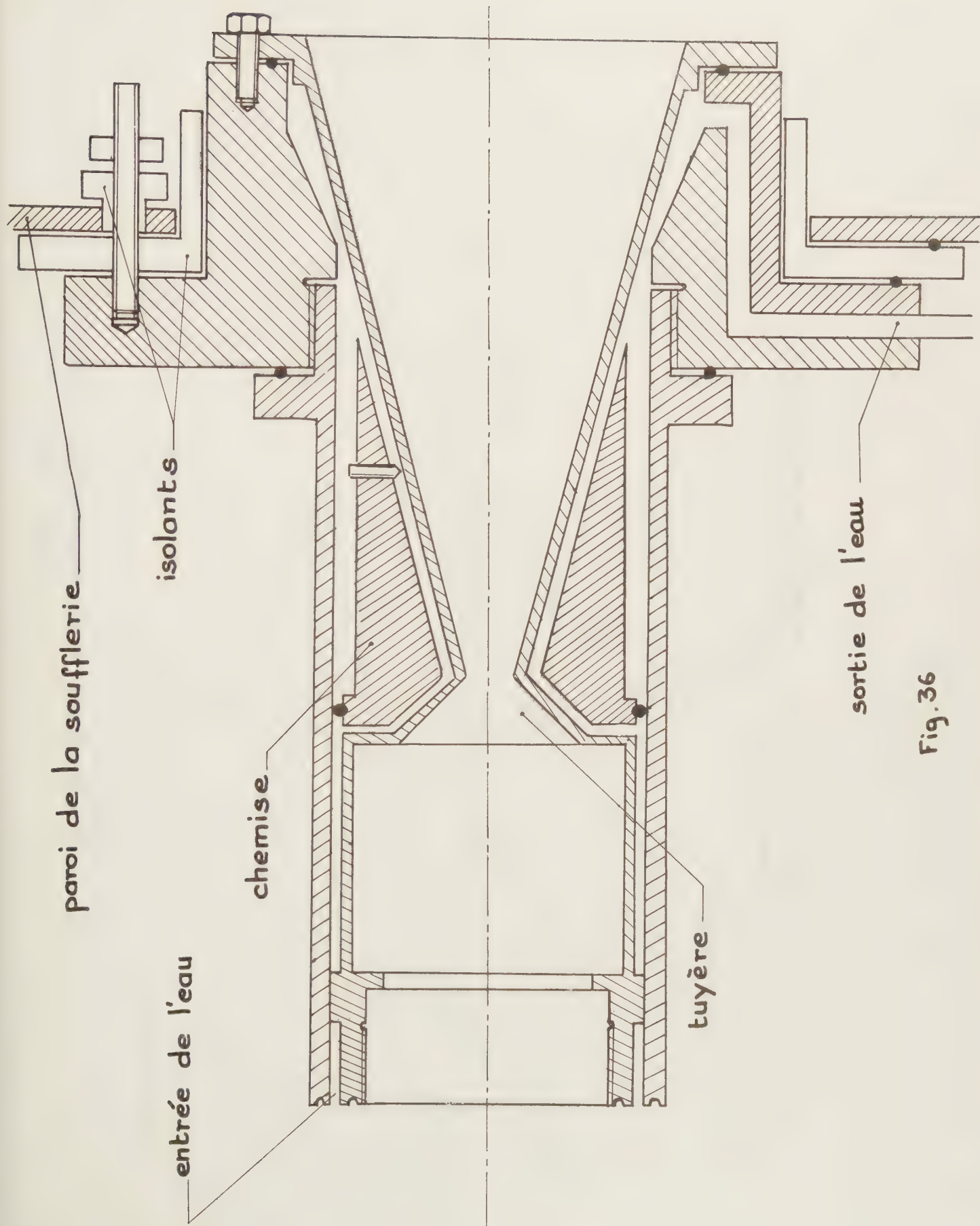


Fig. 36

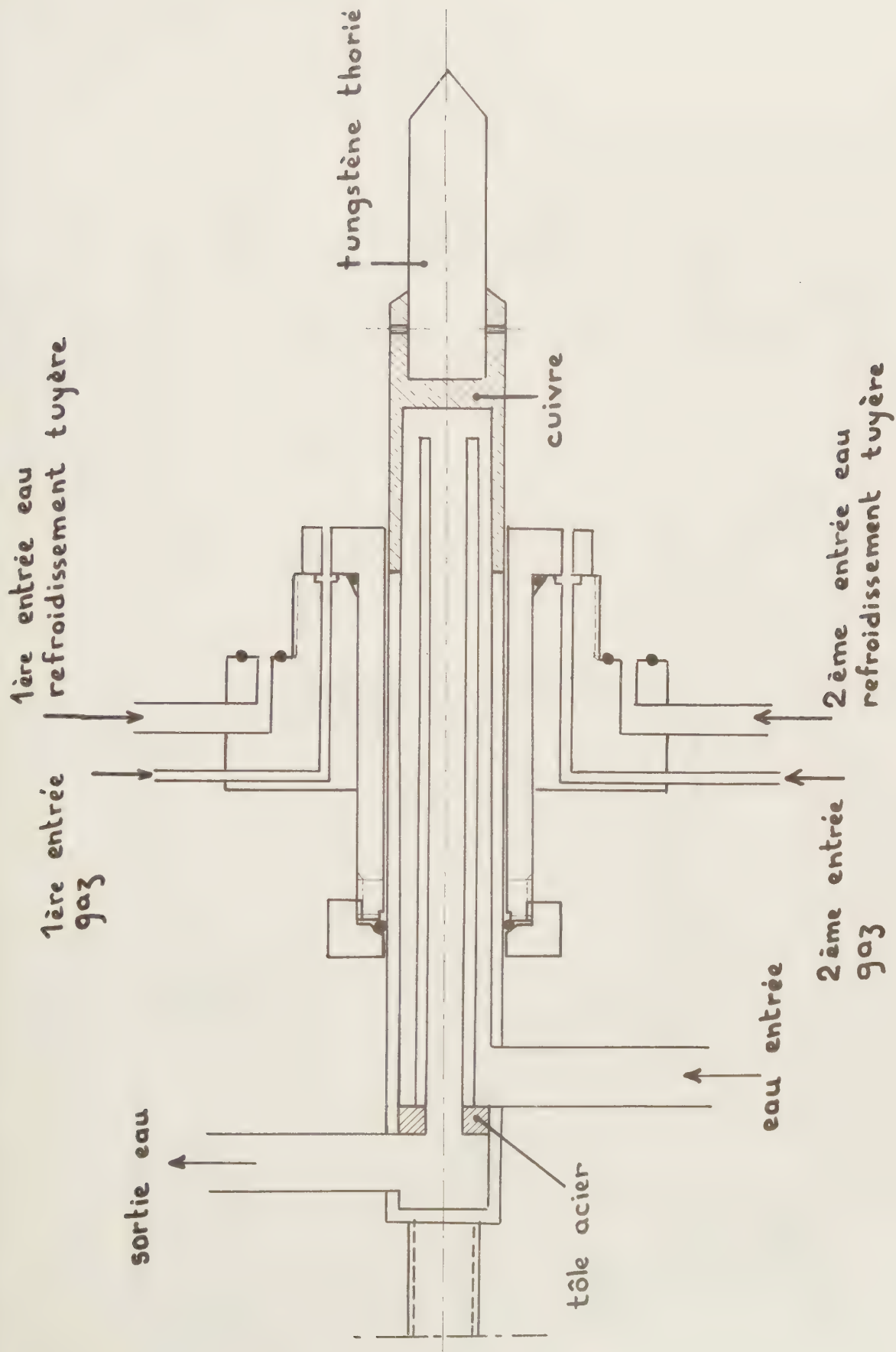
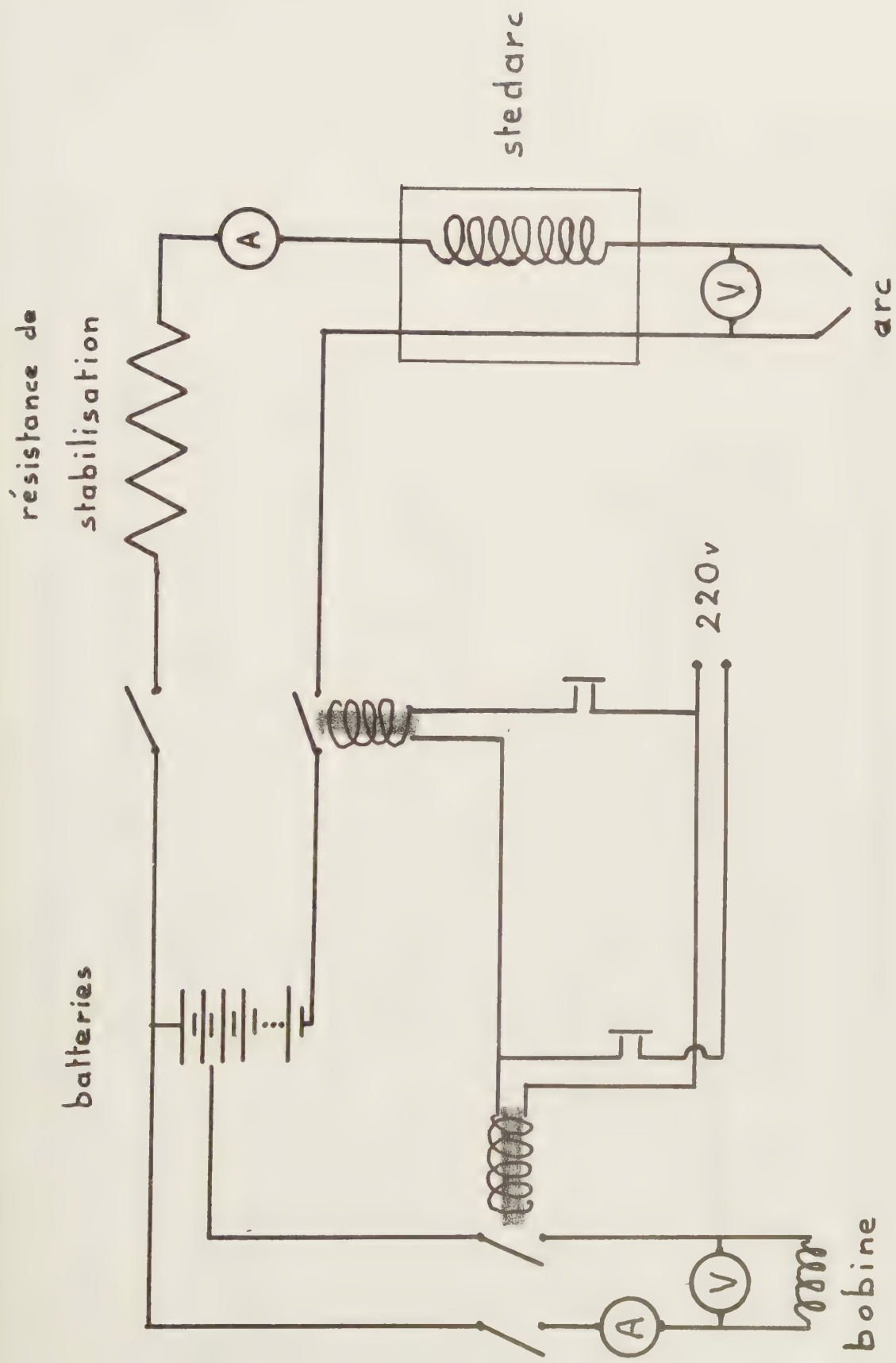


Fig. 37



Circuit d'alimentation de l'arc

Fig. 38

Variations de l'intensité, du potentiel
et de la puissance en fonction du
déplacement de l'électrode

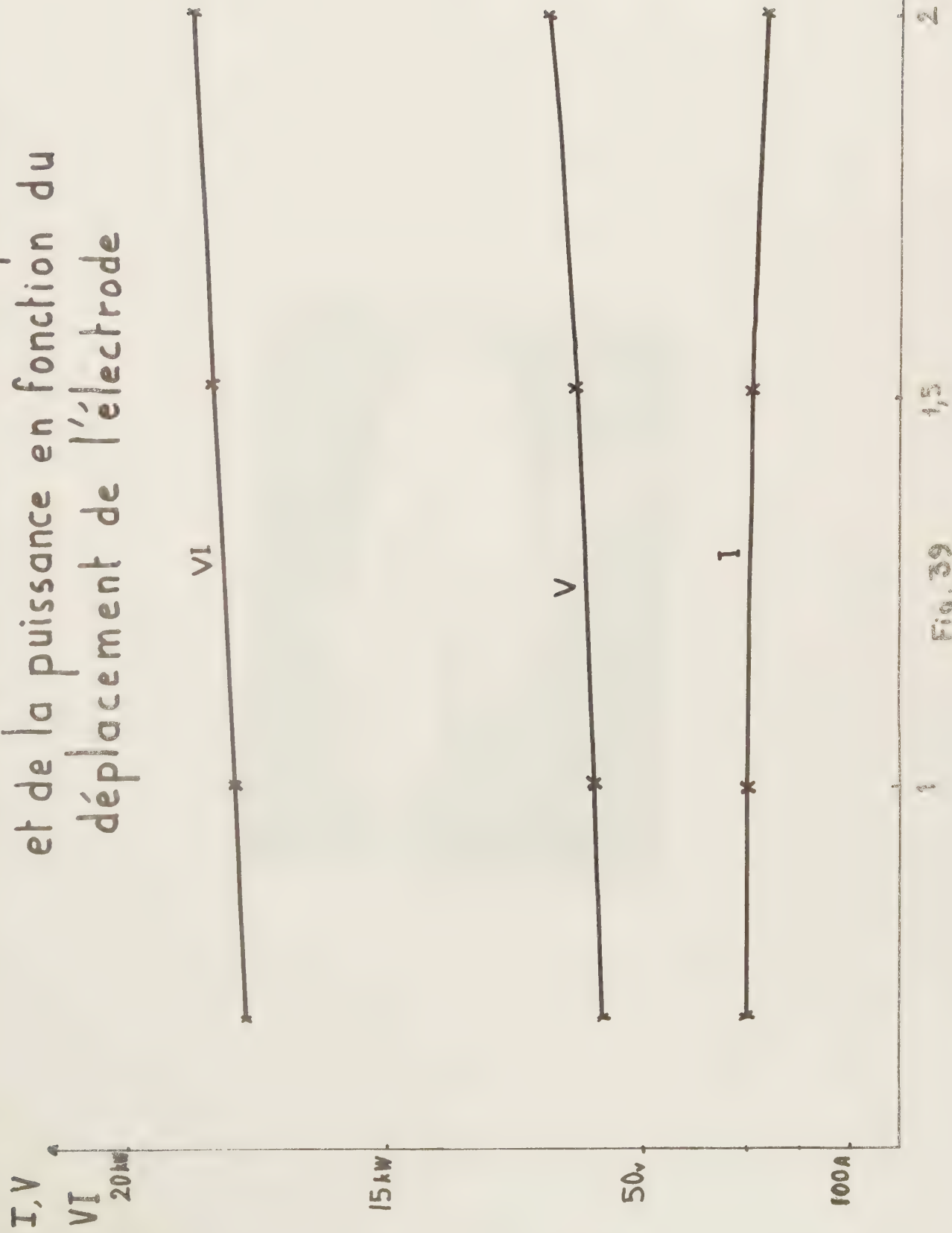
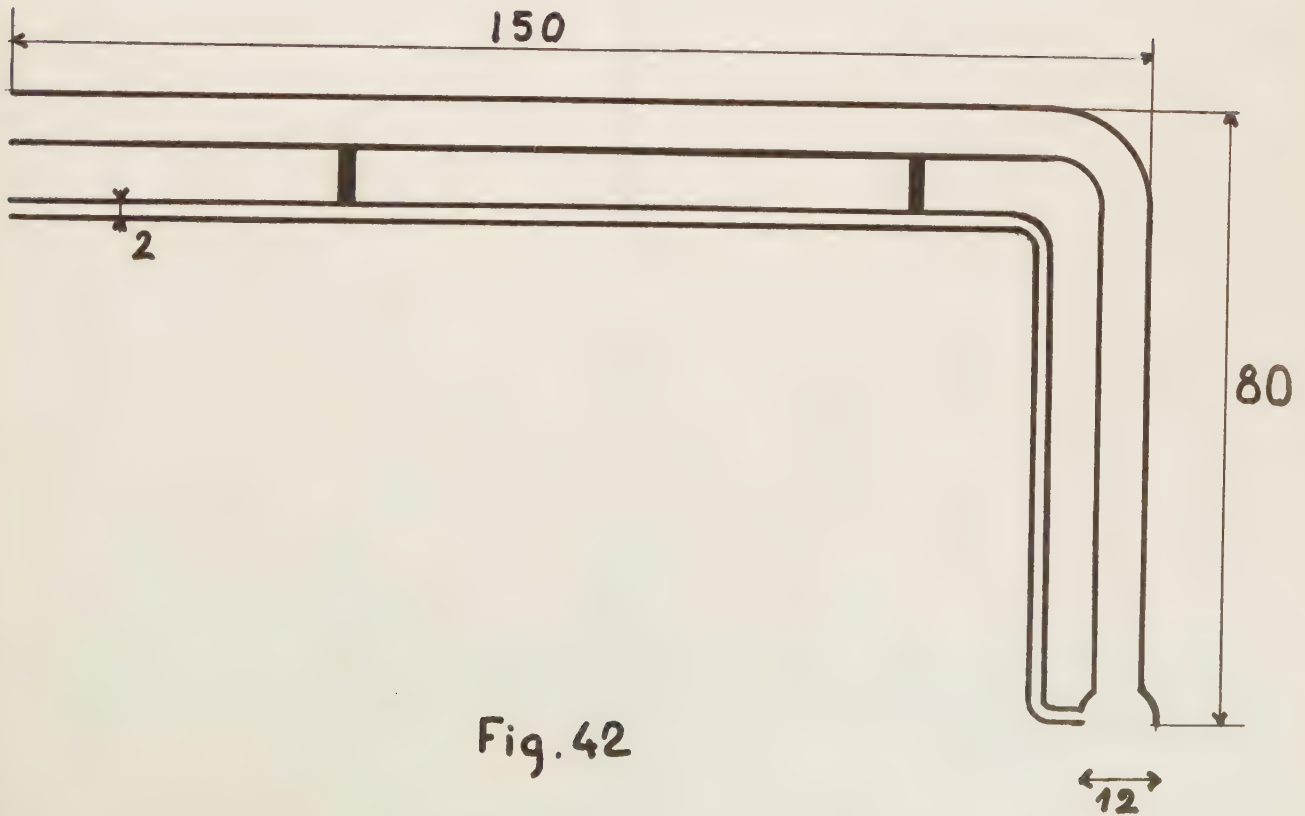
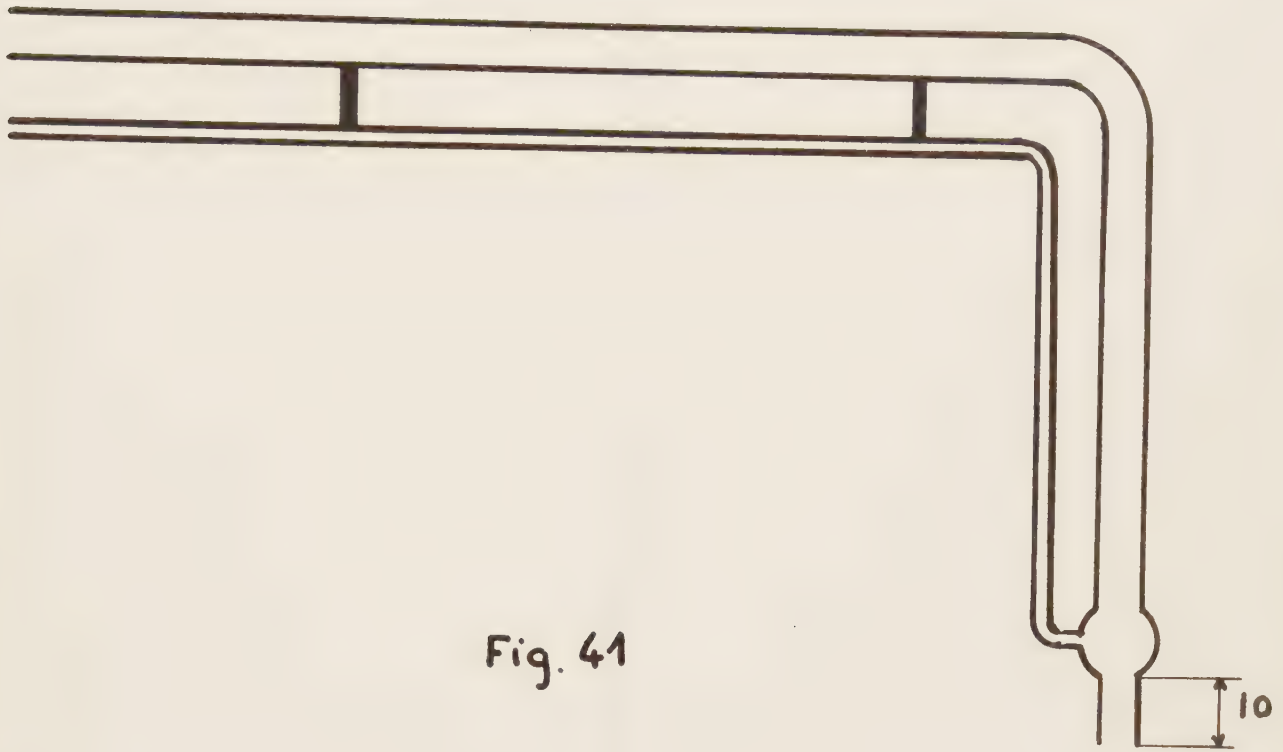


Fig. 39



FIG. 40

Sondes en Quariz



Spectre de l'azote

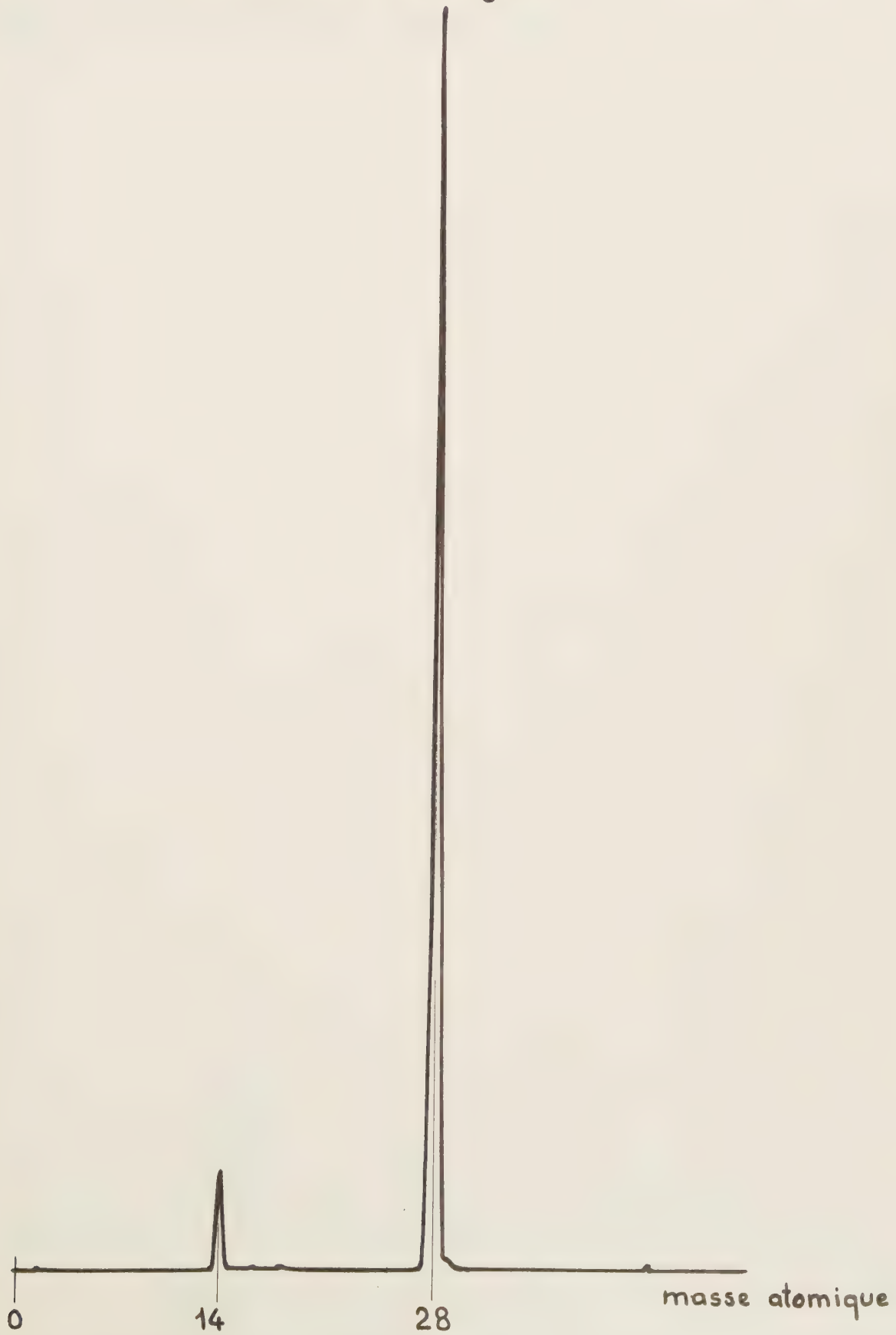


Fig. 43

Spectre du mélange azote-méthane sans arc

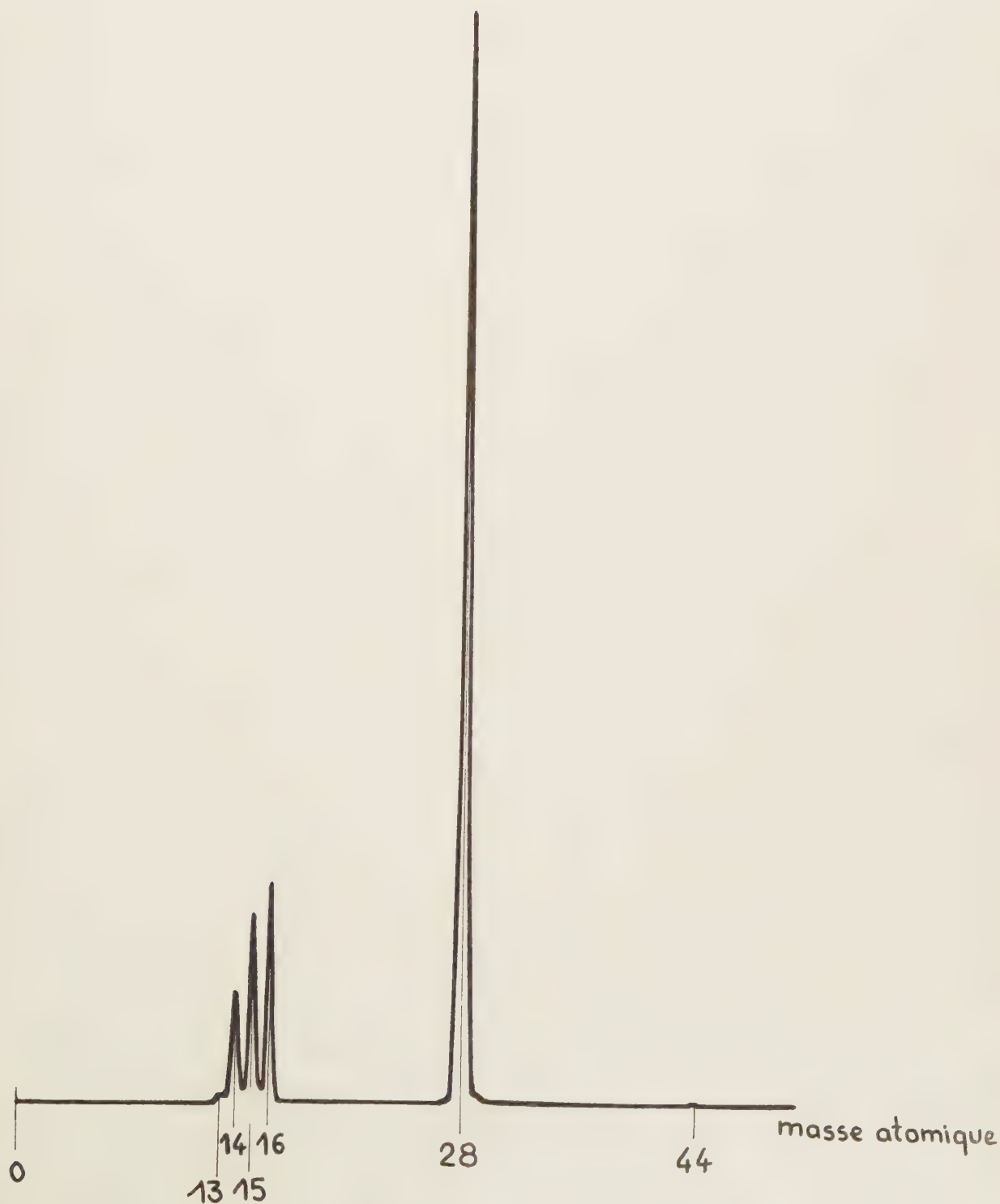


Fig. 44

Spectre du mélange azote activé, méthane

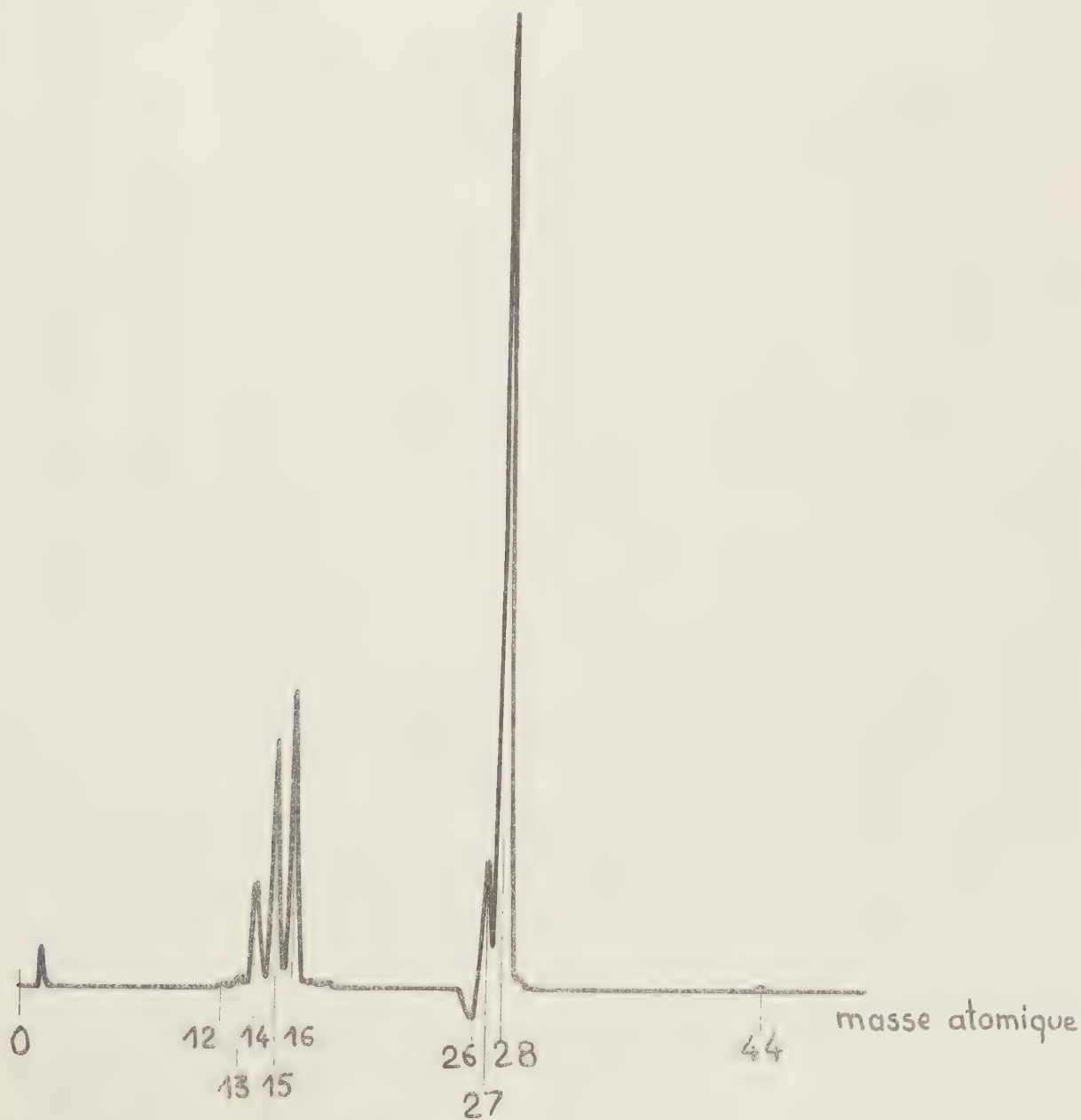


Fig. 45

Variation de $[N]$ en fonction du
pourcentage d'injection
de méthane

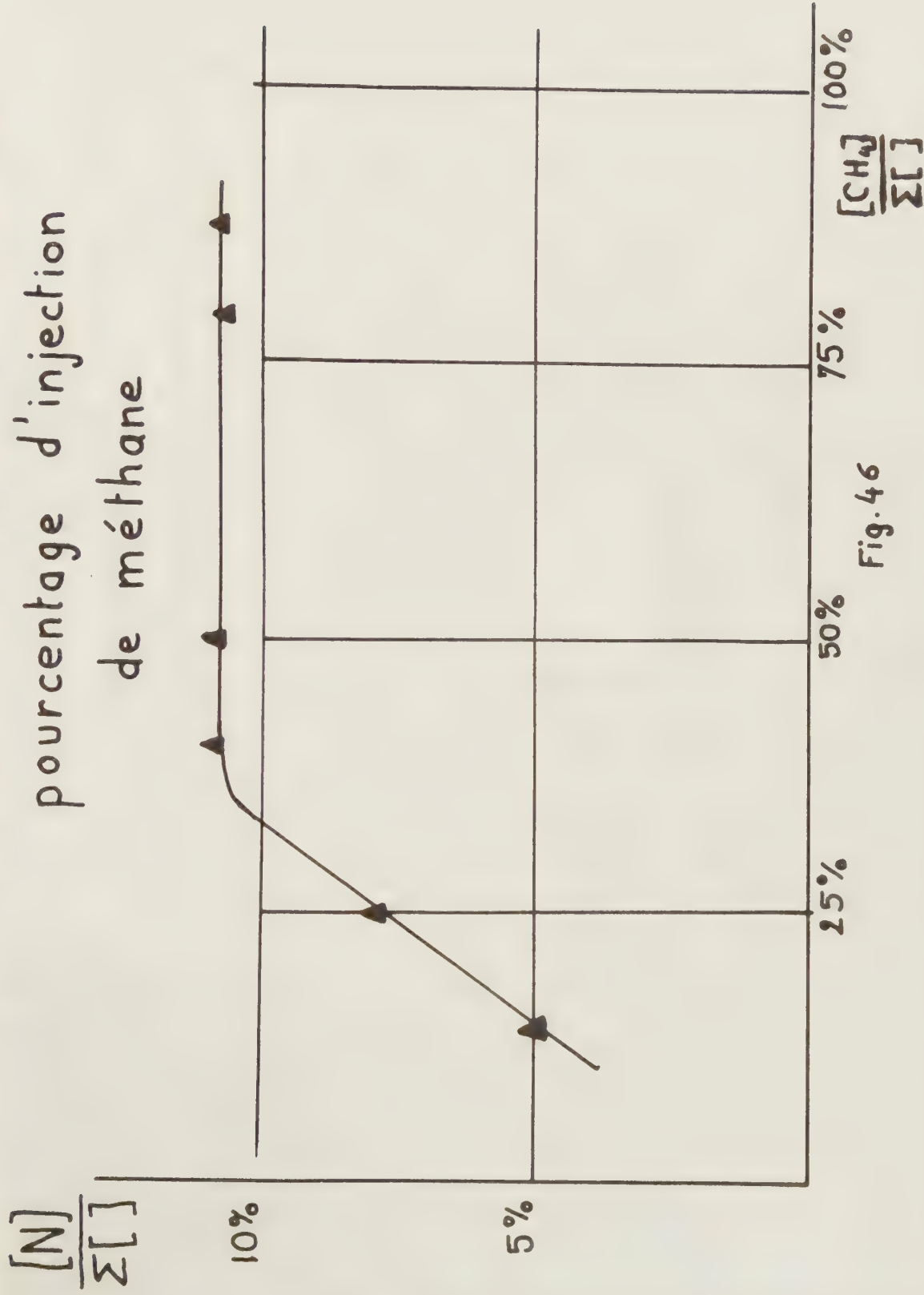


Fig. 46

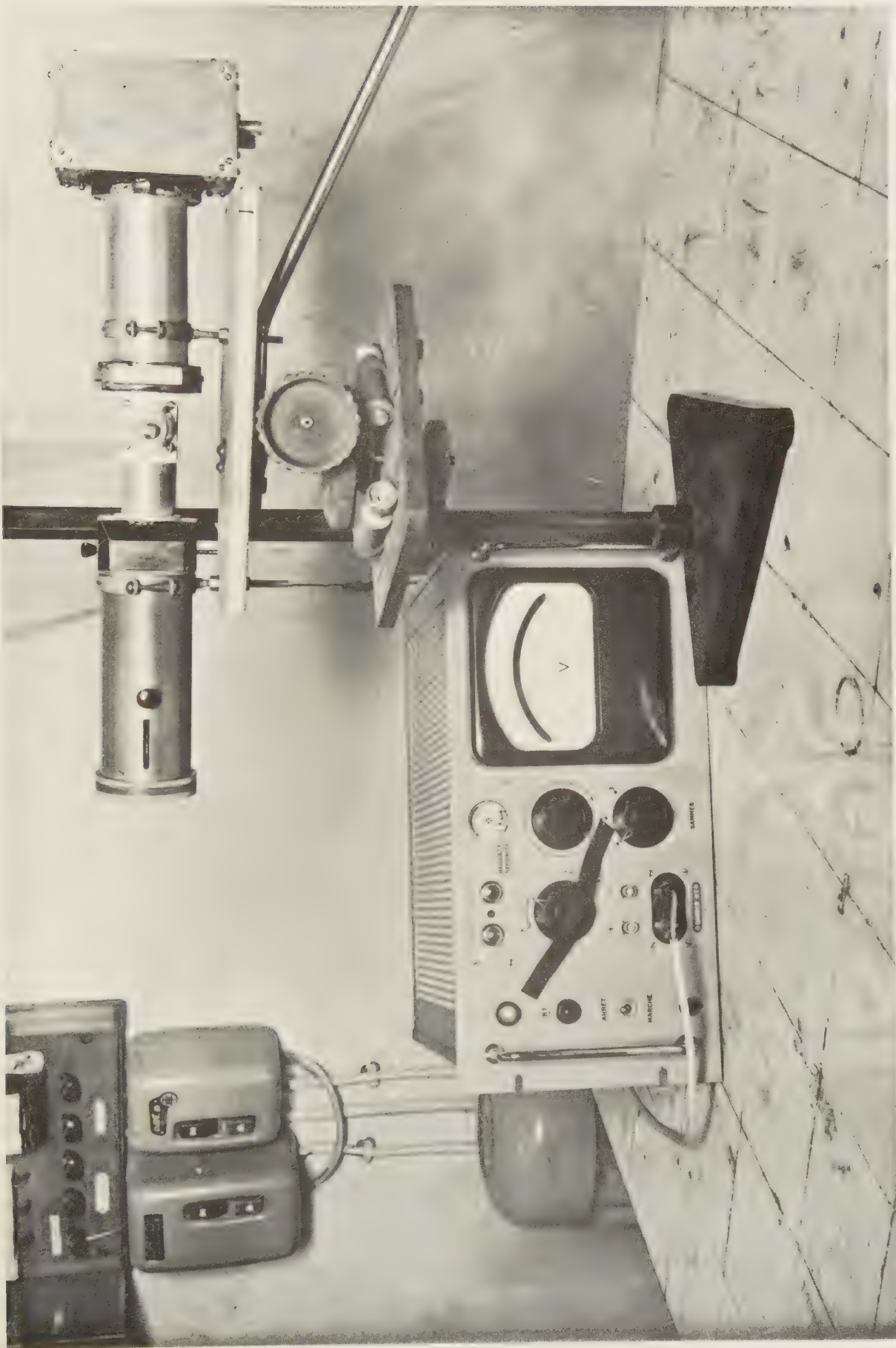


FIG. 47

courbe d'absorption par rapport à l'air

filtre gélatine violet Kodak Wratten

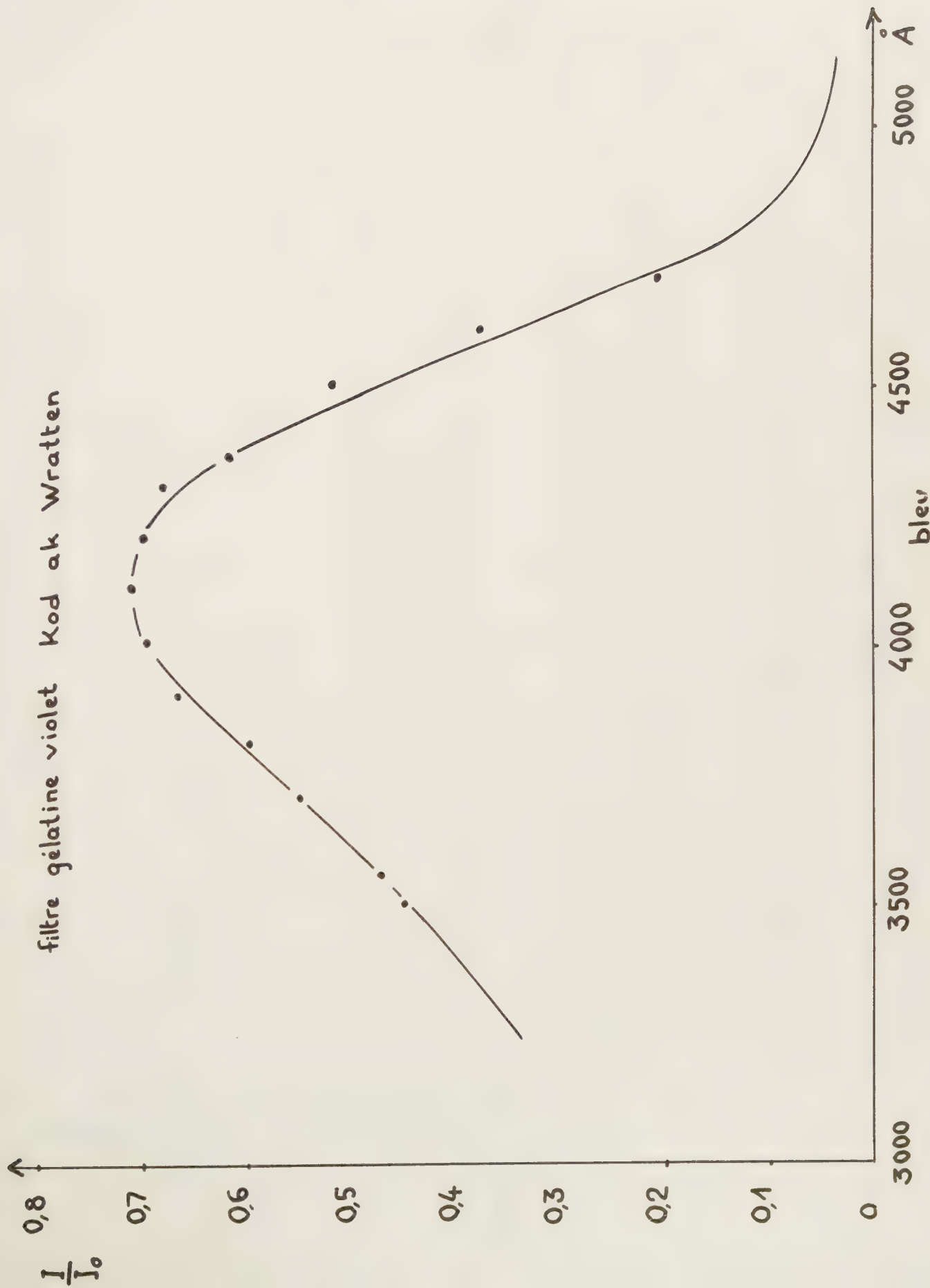
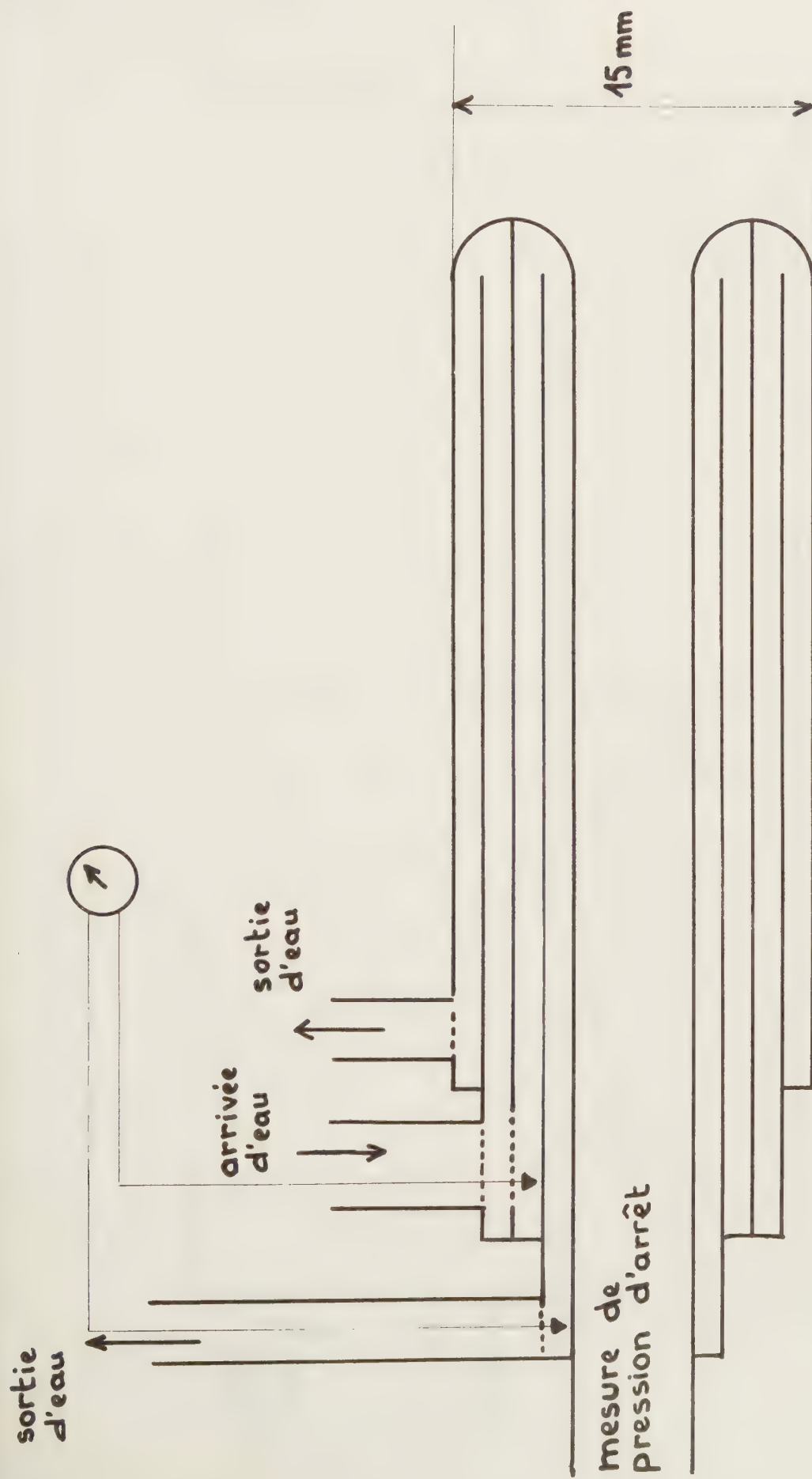


Fig. 48



Sonde d'enthalpie et de pression d'arrêt

Fig. 49

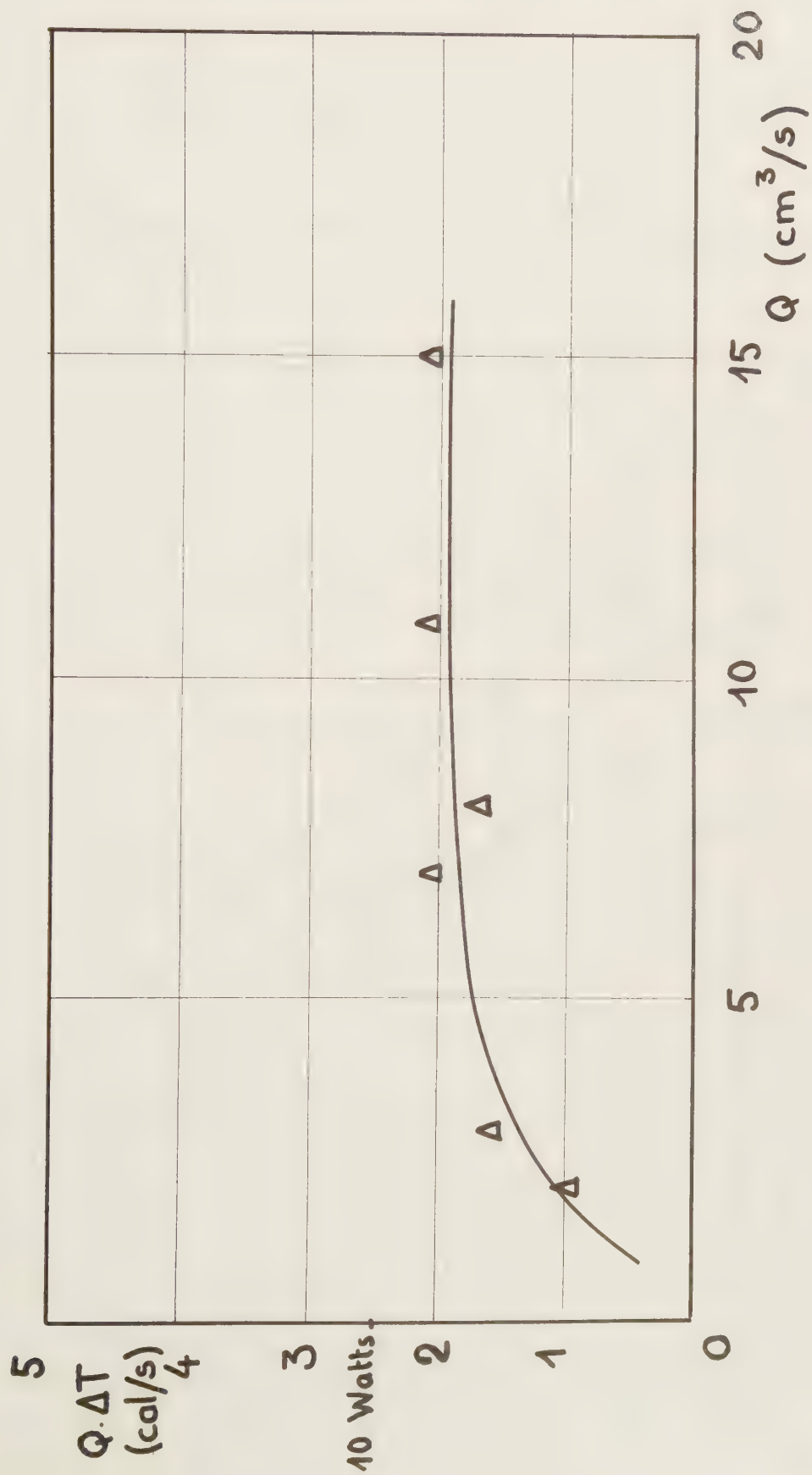


Fig. 50

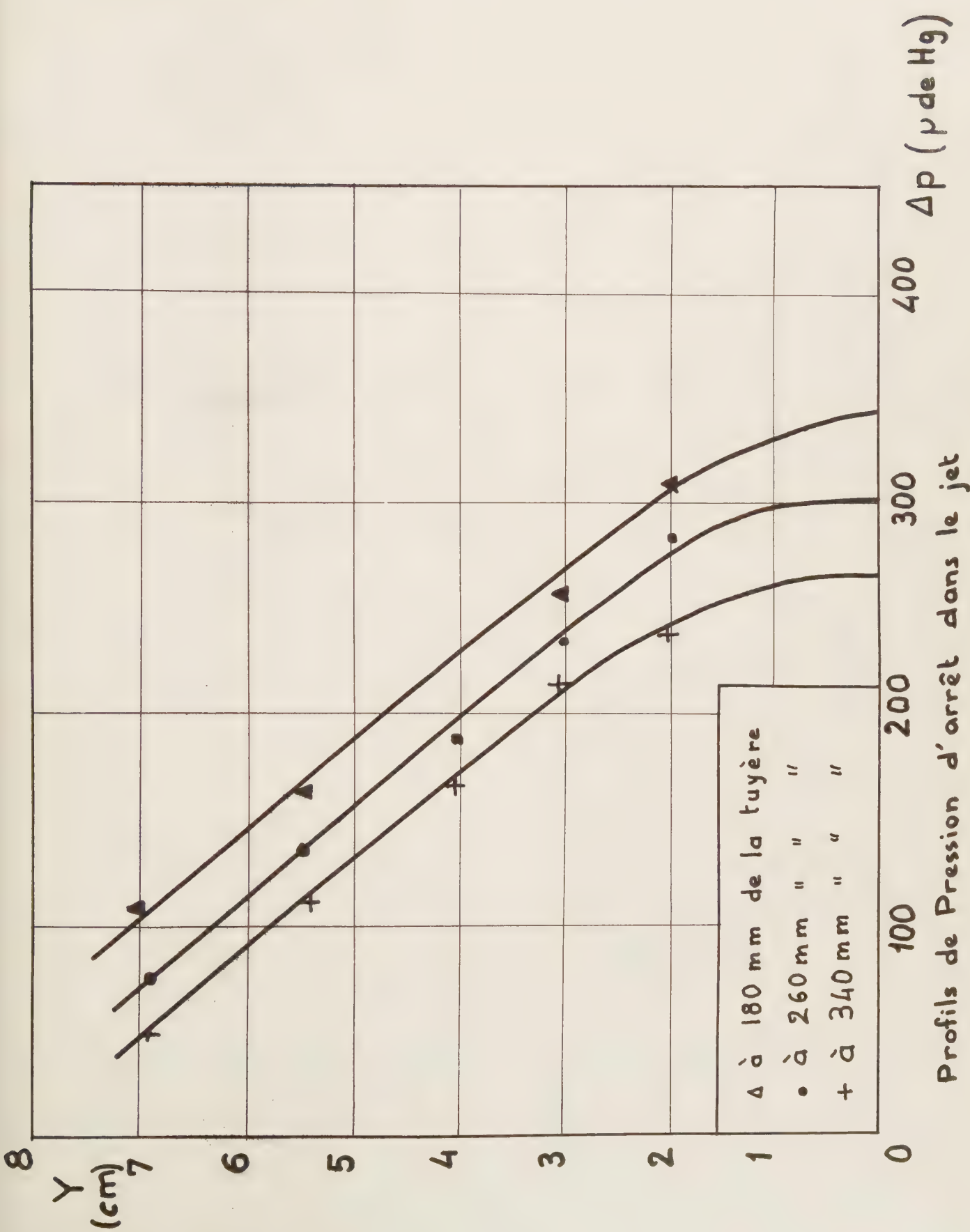


Fig. 51

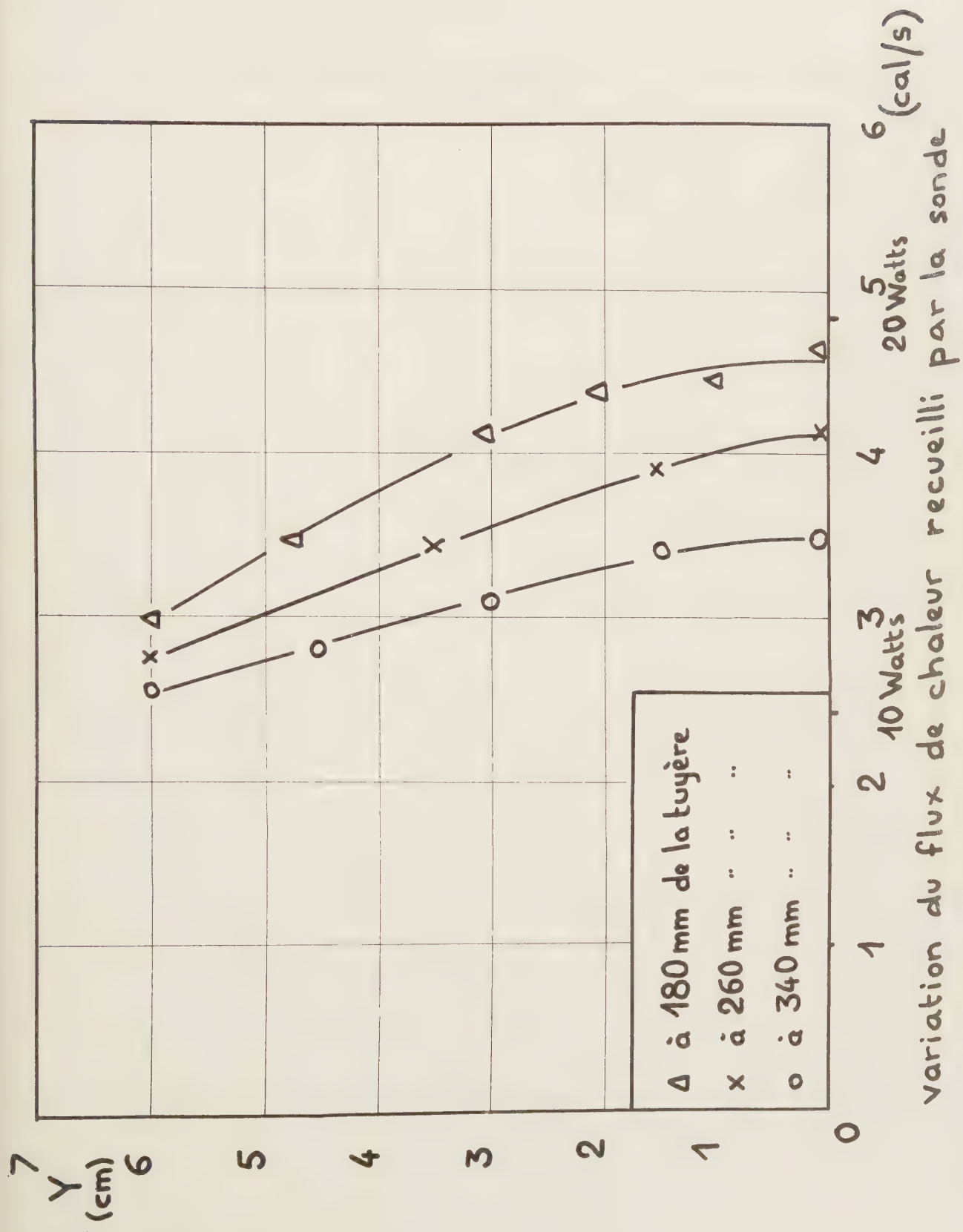


Fig. 52

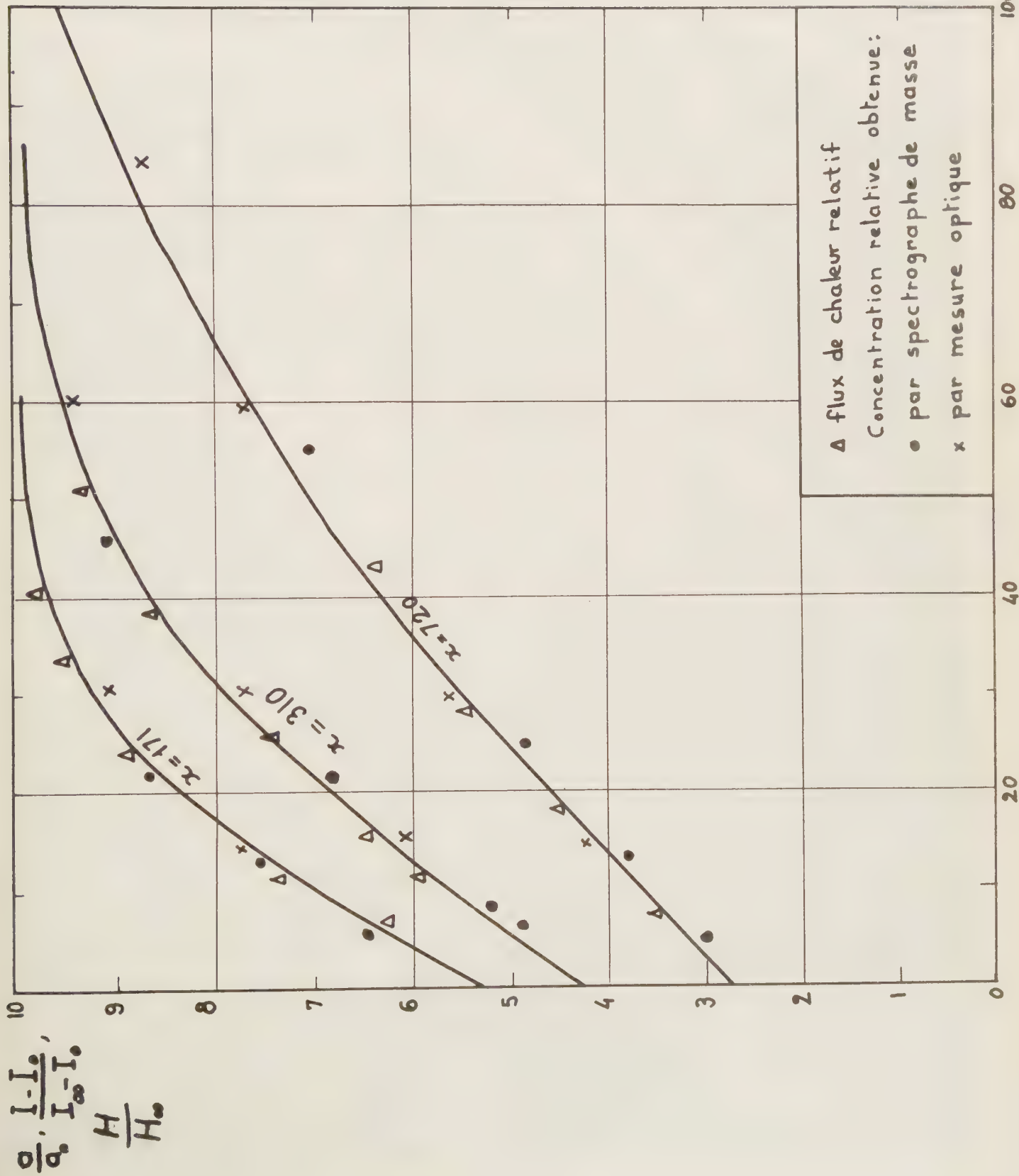


Fig. 53

Y

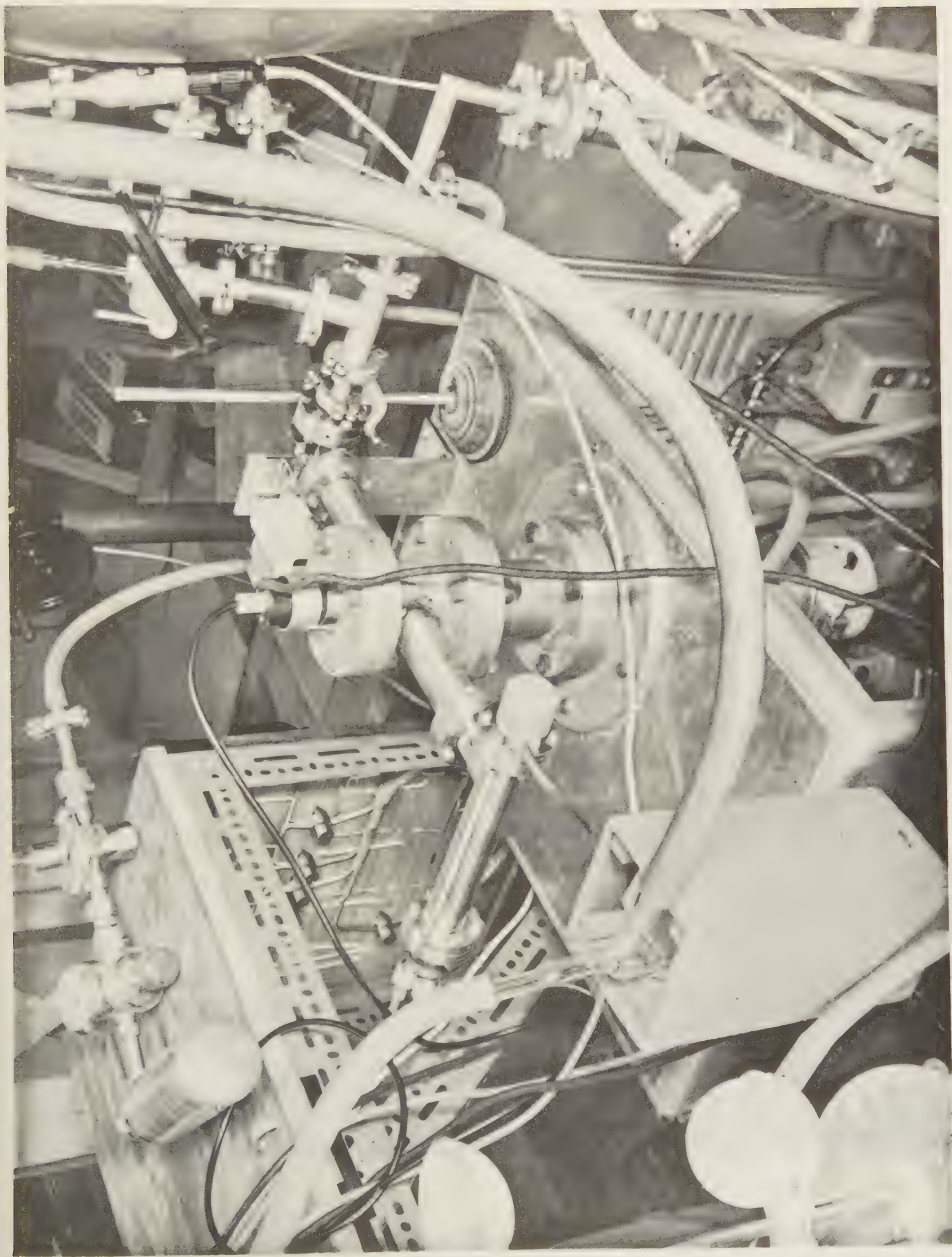


FIG. 54

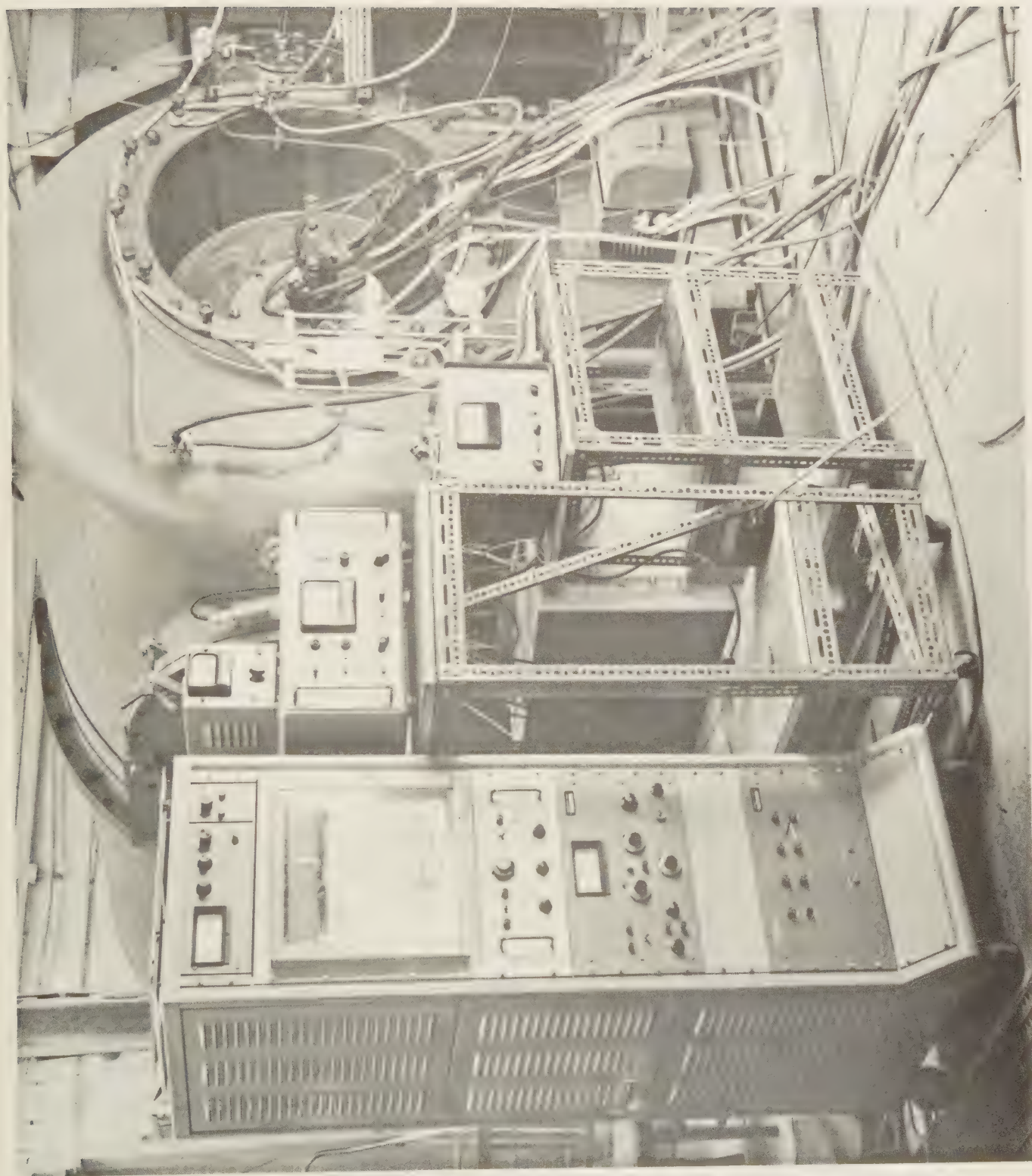


FIG. 55

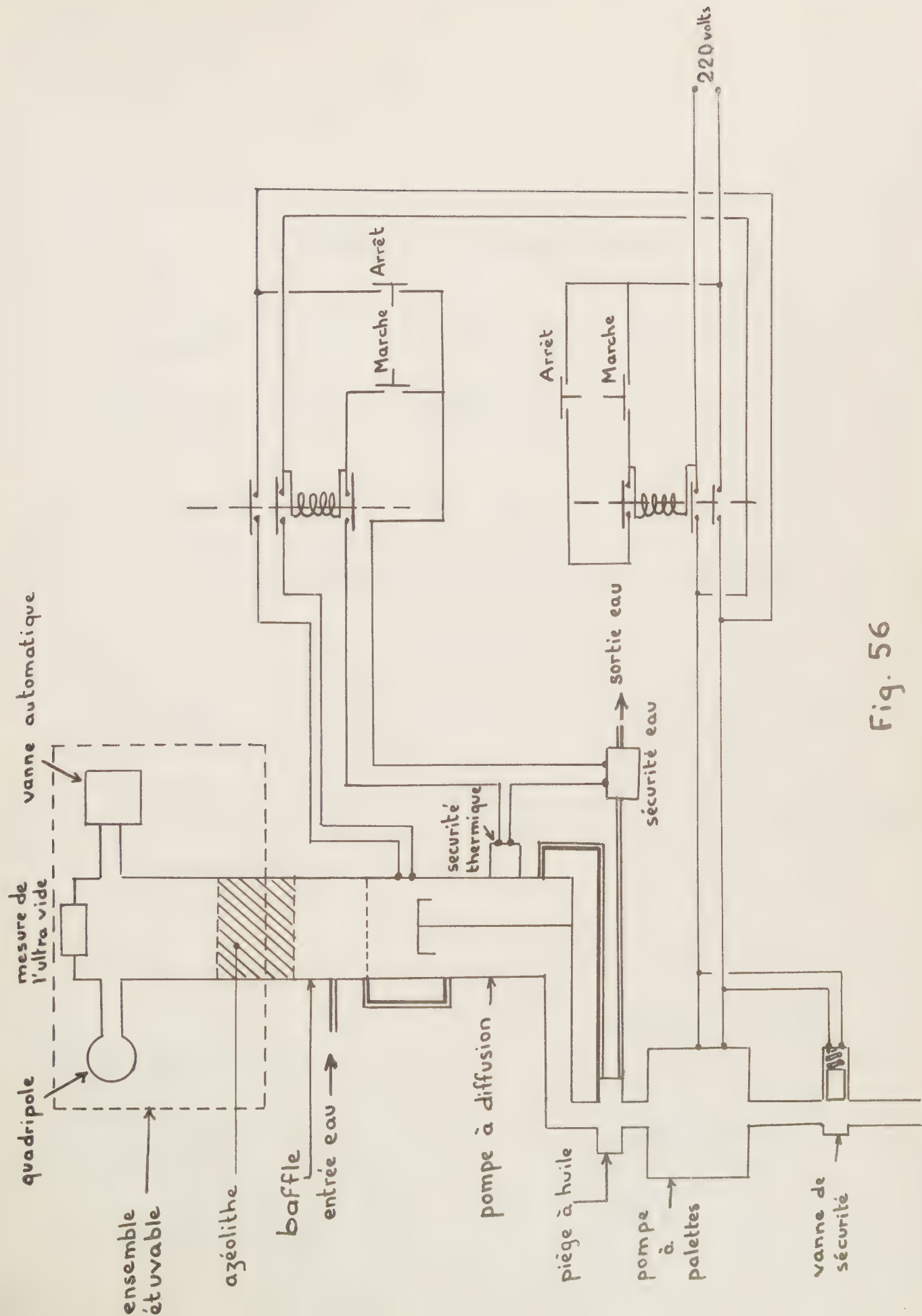


Fig. 56

FACULTÉ DES SCIENCES
DE PARIS

9, QUAI SAINT BERNARD - PARIS V*

SERVICE DE LA SCOLARITÉ

Bureau des Enseignements du 3^e Cycle

TÉLÉPHONE : 338-25-25 - P

PERMIS D'IMPRIMER

DOCTORAT : D'ETAT

THESE DE : ES SCIENCES PHYSIQUES

Nom : LASSAU

Prénoms : Gérard

Né (e) le 29 Octobre 1936 à PARIS XVIII^e Dép^t Seine

SUJETS

1^{ère} THESE : " Etude d'une couche limite laminaire avec une réaction chimique
catalysée sur la paroi."

2^e THESE (Propositions faites par la Faculté) :

" Influence de la géométrie de l'orifice dans les mesures de
pressions statiques."

Vu et approuvé

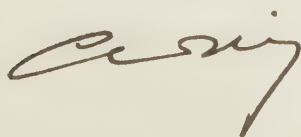
Paris, le 29 Juin 1967

Le Doyen de la Faculté
des Sciences de Paris

Vu et permis d'imprimer

Paris, le

Le Recteur de l'Académie
de Paris



Imprimé aux Laboratoires de Bellevue
1, Place Aristide-Briand, à Bellevue (Seine-et-Oise)

